МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М. П. ДРАГОМАНОВА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

НОВІКОВА Анна Олександрівна

УДК 373.5.016:512]:519.673(043.3)

ДИСЕРТАЦІЯ

ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____________________ А. О. Новікова

Науковий керівник: **ШВЕЦЬ Василь Олександрович**
кандидат педагогічних наук, професор

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Новікова А. О. Формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання у процесі навчання алгебри. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук зі спеціальності 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)». – Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, 2021.

Зміст анотації

У дисертації досліджено проблему формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання в процесі навчання алгебри. Зокрема у праці проаналізовано науково-педагогічні дослідження, у яких розглянуто питання реалізації прикладної спрямованості курсу математики; уточнено зміст поняття «*прикладна спрямованість курсу математики»* та *«прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри»;* запропоновано теоретично обґрунтовану й експериментально перевірену методику формування в учнів основної школи вміння математичного моделювання. Установлено, що *прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри* – це цілеспрямована зорієнтованість змісту, цілей, методів, організаційних форм і засобів навчання математики на реалізацію методологічних і змістових зв’язків курсу алгебри з практикою; формування в учнів математичних умінь та навичок під час вивчення алгебри, важливих для повсякденного життя й майбутньої професійної діяльності. У дослідженні виокремлено низку *методів реалізації прикладної спрямованості навчання курсу алгебри* (математичне моделювання, навчальні проєкти, практичні роботи та навчальна практика), однак основним визнано метод математичного моделювання, тому *засобом реалізації прикладної спрямованості навчання курсу алгебри* є система прикладних задач.

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що визначено дидактичну схему реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу алгебри; сформульовано дидактичні вимоги до прикладних задач, які

сприяють формуванню вміння математичного моделювання; розроблено добірку прикладних задач для курсу алгебри основної школи; представлено етапи розв'язання прикладної задачі; запропоновано модель формування вміння математичного моделювання.

У дослідженні зазначено, що *система задач* є сукупністю дібраних і розміщених за певним порядком задач, які відповідають поставленій меті та діють як ціле; їхній взаємозв'язок сприяє досягненню запланованого результату. Також запропоновано вимоги до прикладних задач системи: змістова валідність, відповідність дидактичним цілям, диференційовна реалізовність, узгодженість з видом математичної моделі, наявність фабули задачі, повнота даних.

Уміння здійснювати математичне моделювання є спеціальним, тобто умінням, потрібним для вивчення окремого предмету. Підґрунтям для такого формування є належний обсяг знань про математичні факти та розвинене вміння досліджувати й вивчати математичні об'єкти. З-поміж умов успішного формування уміння здійснювати математичне моделювання виокремлено такі: чітке формулювання мети, яку потрібно усвідомити учневі і яка відповідатиме мотивам діяльності; урахування вікових та психологічних особливостей учня; визначення операцій, що є складниками дії, для підбору методики формування уміння; створення умов для засвоєння учнем знань про дію та умови застосування на практиці; урахування межі функціонування уміння; залучення учня до активної діяльності, а не до простого отримання інформації.

Відповідно до структури вміння розроблено модель формування в учнів основної школи уміння математичного моделювання, у якій передбачено цільовий (мета формування уміння, забезпечення мотивації); змістовий (наповненість навчальним матеріалом та індивідуально значуща діяльність; зв'язок зі змістовими лініями шкільного курсу алгебри); діяльнісний (етапи організації діяльності учнів, рівні сформованості та уміння, які відповідають сутності конкретного рівня), контролювальний (діагностика за критеріями сформованості уміння, визначення рівня сформованості уміння математичного моделювання) компоненти.

Ефективність запропонованої методики формування вміння математичного моделювання перевірено під час формувального експерименту. Результати, отримані в процесі дослідження, дають змогу стверджувати, що розроблена методика формування в учнів основної школи вміння математичного моделювання сприяє розвитку пізнавального інтересу; підвищенню мотивації учнів до навчання математики; поглибленню знань; засвоєнню алгоритму застосування математичного моделювання до розв’язання прикладних задач.

Ключові слова: прикладна спрямованість курсу алгебри, математична модель, математичне моделювання, основна школа, прикладна задача, уміння здійснювати математичне моделювання.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМАТИКОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях

1. Чінчой А. О. Математичне моделювання як засіб здійснення міжпредметних зв’язків курсу алгебри. *Наукові записки. Вип. 9. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Ч.1.* Кіровоград : РВВ КДПУ імені Володимира Винниченка, 2016. С. 54–61.

2. Новікова А. О., Швець В. О. Система задач з теми «Нерівності» як засіб реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 18 :* збірник наукових праць. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 170–178. *(Особистий внесок здобувача: описано систему прикладних задач з теми «Нерівності», виокремлено типи та рівні складності прикладних задач)*.

3. Новікова А. О. Змістова лінія тотожні перетворення в контексті прикладної спрямованості курсу алгебри. *Наукові записки . Вип. 12. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3.* Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2017. С. 37−41.

4. Новікова А. О. Використання програмного забезпечення GeoGebra під час розв'язування прикладних задач змістової лінії «Функції та їх графіки». *Наукові записки. Вип. 169. Серія: Педагогічні науки.* Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 112−115.

5. Новікова А. О., Чінчой О. О. Використання науково-технічного потенціалу агропромислових виставок для реалізації методів математичного моделювання в курсах алгебри і фізики загальноосвітньої школи. *Наукові записки :* [збірник наукових статей] / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Випуск СXXXXI(141). 280 с. (Серія педагогічні науки). С. 156–162. *(Особистий внесок здобувача: окремі складники змісту та проєкт)*.

6. Ботузова Ю. В., Новікова А. О. Використання інтерактивної дошки на уроках математики. *Наукові записки. Вип. 168. Серія: Педагогічні науки.* Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 47−52. *(Особистий внесок здобувача: розроблено особливості методики використання Smart Notebook і Learningapps на уроках математики)*.

7. Швець В. О., Новікова А. О. Математичне моделювання в курсі алгебри під час розв'язування задач на рух. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 20:* збірник наукових праць. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. С. 70–76. *(Особистий внесок здобувача: продемонстровано використання методу математичного моделювання в процесі розв'язування прикладних задач на рух)*.

8. Чінчой А. О. Організація і проведення навчальної практики старшокласників у редакційно-видавничому центрі. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Випуск 40:* збірник наукових праць. Київ, 2013. С. 269–273.

9. Чінчой А. О. Створення математичних задач з елементами історизму як засіб формування пізнавального інтересу учнів гуманітарних класів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Випуск 47: збірник наукових праць.* Київ, 2014. С. 295–300.

10. Чінчой А. О. Використання археологічного матеріалу на уроках математики. *Наукові записки. Випуск 6. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина ІІ.* Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. С. 34–39.

Публікації у закордонних виданнях

11. Новикова А. Система задач как средство реализации прикладной направленности курса алгебры. *Univers Pedagogic. Revistă de Pedagogie şi Psihologie a Institutului de Ştiințe ale Educaţiei.* 2017. Nr.4 (56). С. 48 – 52.

12. Швец В. А., Новикова А. А. Прикладная направленность курса алгебры. *Годишник на ШУ „Епископ К. Преславски" Факултет по математика и информатика, том XVIII C, 2017, с. 105*–117. *(Особистий внесок здобувача: досліджено особливості реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри, розроблено прикладні задачі)*.

Публікації в науково-методичному журналі

13. Чінчой А. О. , Швець В. О. Математичне моделювання як один із методів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. *Математика в рідній школі*, 2016. № 9. С. 27–30. *(Особистий внесок здобувача: продемонстровано розв'язання прикладних задач, розроблених за змістовими лініями курсу алгебри основної школи за методом математичного моделювання)*.

14. Новікова А. О. Навчальний проект як засіб формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання. *Математика в рідній школі,* 2018. № 11. С. 44–47.

Матеріали науково-практичних конференцій інших держав

15. Новикова А. А., Швец В. А. Прикладная направленность курса алгебры основной школы. *Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы:* материалы Международной научно-практической конференции, Минск, 10 – 13 мая, 2017 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; редкол. С. И. Василец (отв. ред.) [и др.]. : Минск: БГПУ, 2017. С. 122 –124. *(Особистий внесок здобувача: окремі складники змісту)*.

Матеріали та тези науково-практичних конференцій

16. Чінчой А. О. Розв’язування задач міжпредметного змісту методом математичного моделювання. *Засоби і технології сучасного навчального середовища*: Матеріали конференції, м. Кіровоград, 27–28 травня 2016 р. / Відповідальний редактор: С. П. Величко. Кіровоград: ПП «Ексклюзив Систем», 2016. С. 64−66.

17. Чінчой А. О. Прикладна спрямованість курсу алгебри основної школи. *Реалізація наступності в математичній освіті: Реалії та перспективи:* збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Одеса, 15–16 вересня 2016 р. Харків: Вид-во «Ранок», 2016. С. 129−131.

18. Новікова А. О. Система задач як засіб реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри основної школи. *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова», 11–13 травня 2017 р.,* м. Київ, Україна. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 28 –29.

19. Новікова А. О. До питання про створення системи прикладних задач з курсу алгебри основної школи. *Проблеми та перспективи фахової*

підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.-практ. конф., 30 травня–1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. С. 155 – 158.

20. Новікова А. О. Психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь і навичок математичного моделювання. *Засоби і технології сучасного навчального середовища:* Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, м. Кропивницький, 18–19 травня 2018 р. / Відповідальний редактор С. П. Величко. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», 2018. С. 18–19.

21. Ботузова Ю., Новікова А. Інтерактивна дошка на уроках математики. *Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті:* збірник матеріалів VI-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет-конференції, м. Кропивницький, 19–20 квітня 2018 р. / За відп. ред. М. І. Садового. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2018. С. 34–36. (Особистий внесок здобувача: окремі складники змісту).

22. Новікова А. О. Педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання. *Сучасна освіта в контексті нової української школи:* зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11–12 жовтня 2018 р. М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 62–64.

23. Новікова А. О. Дидактичні вимоги до конструювання системи прикладних задач як засобу формування уміння математичного моделювання. *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи*: збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 20–21 вересня 2019 р. /Міністерство освіти і науки України, ДЗ «ПНУ імені К. Д. Ушинського» [та ін.]. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. С. 106–108.

24. Новікова А. О., Чінчой О. О. Формування математичної компетентності учнів основної школи в позаурочній роботі. *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інноваційний потенціал сучасної освіти та науки»,* НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Київ, 2020. С. 183–186. *(Особистий внесок здобувача: описано особливості та форми позаурочної роботи з математики, які забезпечують формування математичної компетентності)*.

ANNOTATION

Novikova A.O. Formation of skills of mathematical modelling in pupils of basic school in the process of teaching algebra. – Manuscript.

Dissertation for the degree of pedagogical sciences, specialty 13.00.02 – Theory and Methods of Teaching (Mathematics). – National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, 2021.

Content of annotation

The dissertation is dedicated to the problem of formation of skills of mathematical modelling in pupils of basic school in the process of teaching algebra. Scientific-pedagogical researches which deal with applied nature of mathematics course are analyzed, the essence of the notion *«applied nature of the course of mathematics»* and «*applied nature of the school course of algebra»* has been specified, theoretically grounded and experimentally verified methods of formation of mathematical modelling skills in pupils of basic school have been suggested.

It has been found out that «*applied nature of the school course of algebra»* is meaningful orientation of content, purpose, methods, organization forms, and means of teaching mathematics on: formation of methodological and essential relations of algebra course with practice; formation in pupils of mathematical skills which are necessary for real life and future professional activity. There have been singled out the method of realization of *applied nature of the school course of algebra* (mathematical modelling, studying projects, practical works, training practice), but the main method is considered to be the method of mathematical modelling. Accordingly, the *means of realization of applied nature of the school course of algebra* is the system of applied problems.

The novelty of the research lies in the fact that the didactic scheme of realization of applied nature of the school course of algebra has been defined; didactic requirements to applied problems which help to form mathematical modelling skill; a collection of applied tasks has been compiled; stages of solving an applied problems; the model of mathematical modelling skill has been suggested.

In the research we treat the system of problems as a complex of selected and put in certain order tasks which correspond to the posed purpose, work as the whole, whose interrelation leads to the planned result. The requirements to the applied problems system have been offered: content validity, correspondence to didactic aims, differentiating realization, sequence with a certain mathematical model; existence of content; fullness of data.

The skill of doing mathematical modelling is a special one which demands a separate subject. Such a skill presupposes knowledge about mathematical facts, as well as skills to study mathematical objects. The following conditions of formation of mathematical modelling skill have been outlined: clear formulation of the purpose which will be realized by the pupil, and will correspond to motives of activity; taking into account age-related and psychological peculiarities of a pupil; definition of operations which are included to action structure and aimed at selection of skill methods formation; formation of conditions for a pupil to get knowledge about the action and its application in practice; taking into account the limit of a skill functioning; involvement of a pupil into a dynamic activity, not only into simple getting of information.

The model of formation of the mathematical modelling skill in pupils of basic school has been worked out. This model includes goal-oriented (the purpose of skill formation, motivation assurance), content-related (is assured by the scope of instructional material and individual activity; interrelation between content-lines of the school course of algebra), activity approach (stages of pupils' activity organization, levels of maturity and corresponding essences of the skill typical of a definite level), controlling (diagnostics according to skill formation criteria, determination of the level of mathematical modelling skill formation) components.

The effectiveness of the suggested methodology of mathematical modelling skill formation has been verified during forming experiment. The results of the research make it possible to claim that the elaborated methodology of mathematical modelling skill in pupils of basic school facilitates: development of perceptual interest; raising of pupils' motivation to learning mathematics, deepening of knowledge, mastering the algorithm of mathematical modelling usage for solving applied tasks.

Key words: applied nature of the course of algebra, mathematical model, mathematical modelling, basic school, applied task, the skill to perform mathematical modelling.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Концепцію Нової української школи відповідно до Закону України про освіту [60] зорієнтовано насамперед на формування в учнів компетентностей, потрібних молодій людині для успішної самореалізації в суспільстві; на створення нової структури школи, що забезпечує засвоєння нового змісту й здобуття компетентностей для життя. На сучасному, етапі в освіті передбачено виконання такого важливого завдання: створити загальноосвітню школу, яка забезпечить готовність учнів до успішного життя в умовах постійних і стрімких суспільних та технологічних змін, що водночас з іншими завданнями ставлять акцент на реалізації прикладної спрямованості навчання математики, важливості підвищення результатів навчання математики в основній школі, на розвитку учнів завдяки формуванню математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями.

Згідно з Державним стандартом базової і повної середньої освіти [51] основною метою вивчення освітньої галузі «Математика» є вироблення в учнів умінь і навичок, потрібних для оволодіння предметами природничо-математичного циклу, а також у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності. Одним з пріоритетних завдань реалізації змісту освітньої галузі «Математика» в школі є формування в учнів знань про математичні поняття й методи, що є важливими засобами моделювання реальних процесів і явищ, тому одним з актуальних напрямів освітнього процесу є посилення реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики [112].

Проблема реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри перебуває на етапі розв'язання. Різні її аспекти викладено в працях українських та зарубіжних учених, зокрема теоретично обґрунтовано проблему реалізації прикладної спрямованості математики (О. М. Астряб, Г. П. Бевз, Б. В. Гнеденко, О. С. Дубинчук, Ю. М. Колягін, З. І. Слєпкань, В. В. Фірсов та ін.); визначено умови реалізації прикладної спрямованості навчання математики в школі (Ю. М. Колягін, В. В. Пікан); сформульовано загальні принципи, які забезпечують шкільному курсу математики прикладну спрямованість (В. В. Фірсов); представлено прикладну спрямованість як засіб активізації пізнавальної діяльності (М. Я. Ігнатенко); вивчено засоби реалізації прикладної спрямованості практичних робіт (Р. Н. Матюгіна), навчальної практики (Н. С. Вагіна), прикладних задач (Л. С. Межейнікова, М. А. Мірзаахмедов, Л. О. Соколенко, А. В. Прус, Г. Я. Дутка, Л. І. Новицька, Е. В Сухорукова, В. О. Швець); досліджено міждисциплінарне застосування математичних методів у процесі вивчення наукових дисциплін (Л. Б. Ітельсон, М. І. Грабар, О. О. Гранічіна).

У методиці навчання математики в загальноосвітніх навчальних закладах зосереджено значну увагу на реалізації прикладної спрямованості (Г. П. Бевз, В. О. Швець, Л. О. Соколенко, А. В. Прус). Основні методичні положення щодо навчання учнів математичного моделювання розроблено в наукових розвідках Б. В. Гнеденка, С. І. Шварцбурда, В. В. Фірсова, Г. М. Возняка, Л. О. Соколенко; математичні моделі досліджено засобами інформаційних технологій (М. І. Жалдак, Н. В. Морзе, С. А. Раков); наголошено на важливості формування вмінь і навичок математичного моделювання в майбутніх вчителів математики (Л. Л. Панченко).

Розвиток уміння математичного моделювання в учнів під час вивчення окремих дисциплін розглядали Ю. К. Бабанський, М. І. Бурда, В. В. Волошена, О. І. Ляшенко, О. І. Пометун, З. І. Слєпкань, М. О. Філімонова.

Аналіз досліджень, науково-методичної літератури та освітнього процесу в школі демонструє потребу в методичному забезпеченні процесу реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри, яке в результаті відповідатиме стратегіям розвитку освіти на сучасному етапі та забезпечить формування в учнів уміння математичного моделювання під час вивчення алгебри в основній школі.

Сучасна система освіти, що спрямована на особистісно зорієнтоване навчання, спонукає учнів використовувати методи математичного моделювання під час вивчення математики та розвиває здатність молодих людей у подальшому оволодівати перспективними технологіями для організації професійної діяльності, однак, як засвідчують дослідження Програми міжнародного оцінювання учнів – PISA, що здійснюються в Україні з 2016 р., учні основної школи недостатньо володіють методами математичного моделювання та вміннями використовувати математику в особистих цілях і суспільному житті, тому питання їх упровадження в освітній процес є **актуальним**. Основними причинами, що не дають змоги повною мірою забезпечити розуміння учнями прикладних можливостей математики, є брак навчального часу, відсутність систематизованого методичного матеріалу, недостатня кількість дидактичних засобів для складання й розв'язування задач методами математичного моделювання, відсутність розроблених критеріїв рівня сформованості вмінь математичного моделювання, епізодичність застосування математичного моделювання в освітньому процесі.

Математичне моделювання під час розв'язування задач є важливим методом реалізації прикладної спрямованості навчання математики, що підвищує мотивацію учнів, сприяє розвитку мисленнєвих операцій, поглиблює засвоєння математичного апарату та зв'язків між математичними поняттями, ілюструє застосування теоретичного матеріалу в повсякденному житті та суміжних дисциплінах. Для сучасного учня важливо засвоїти базову систему знань, умінь і навичок й підготуватися самостійно розв'язувати проблеми, пов'язані з навчанням і майбутньою професійною діяльністю.

З огляду на це виникає низка суперечностей:

− між недостатнім рівнем системності знань учнів з алгебри й можливостями прикладної спрямованості для підвищення рівня знань учнів;

− між новими вимогами до математичних знань сучасного випускника, з-поміж яких розвиток особистості учня в процесі формування математичної компетентності, та традиційними методами, формами й засобами навчання математики та алгебри;

− між вимогами до формування в учнів умінь математичного моделювання та недостатнім розумінням учителями розбіжностей між традиційним підходом до навчання й технологіями математичного моделювання;

− між потребою в оволодінні учнями вміннями, потрібними для професійної діяльності, та відсутністю в методичній літературі відповідної системи, яка б передбачала формування цих умінь.

Вище викладені аргументи дають змогу стверджувати, що питання методики підготовки випускника загальноосвітнього закладу до життя й майбутньої професійної діяльності, проблеми, які при цьому виникають, причини, які їх обумовлюють, ще недостатньо вивчено, тому для дослідження обрано тему: «**Формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання у процесі навчання алгебри**».

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано відповідно до тематичного плану науково-дослідної роботи кафедри математики та методики викладання математики НПУ імені М. П. Драгоманова, напрями наукового пошуку: «Технології впровадження прикладної спрямованості навчання математики в профільній школі в умовах комп'ютерно-орієнтованих систем навчання», номер державної реєстрації 0113U003003.

Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол № 10 від 28.01.2016) та узгоджено в Міжвідомчій раді з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол № 5 від 14.06.2016).

Мета дослідження полягає в розробленні й теоретичному обґрунтуванні та експериментальній перевірці системи задач як засобу реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри.

Гіпотеза дослідження: створення й упровадження в освітній процес методики формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання в процесі навчання алгебри відбуватиметься ефективніше, якщо використовувати спеціально підібрану систему задач і забезпечити педагогічні умови, які передбачають:

– створення сприятливого навчально-виховного середовища реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри;

– застосування міжпредметних зв'язків з дисциплінами природничого циклу;

– використання ІКТ у процесі навчання математики.

Для досягнення мети й перевірки гіпотези сформульовано такі **завдання**:

1) проаналізувати стан дослідження проблеми реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри в психолого-педагогічній, навчально-методичній літературі та в освітньому процесі;

2) визначити засоби й методи реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри;

3) створити систему задач для формування в учнів умінь математичного моделювання під час навчання алгебри в основній школі;

4) перевірити експериментально ефективність розробленої методики формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання під час вивчення курсу алгебри.

Об'єкт дослідження – процес навчання алгебри в основній школі.

Предмет – система задач з алгебри як засіб формування в учнів умінь математичного моделювання.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети, виконання завдань дослідження використано комплекс теоретичних, емпіричних і статистичних методів:

- *теоретичних:* аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури для вивчення проблеми реалізації прикладної спрямованості навчання алгебри (1.1–1.3), виокремлення методологічних засад формування в учнів умінь математичного моделювання (1.2–1.3); навчальних програм, підручників і посібників з математики, педагогічних умов, що забезпечують ефективність розробленої методики (1.1); моделювання для розроблення моделі формування вміння математичного моделювання під час вивчення курсу алгебри (2.1);

- *емпіричних:* педагогічне спостереження (1.4), анкетування, опитування вчителів для з'ясування рівня готовності до формування в учнів умінь математичного моделювання, проведення педагогічного експерименту для перевірки ефективності розробленої методики та педагогічних умов її реалізації в освітньому процесі (2.6);

- *математично-статистичних:* оцінка ефективності впровадженої методики формування вміння математичного моделювання під час вивчення курсу алгебри в основній школі (2.6).

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що:

- *визначено* дидактичну модель реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу алгебри;

- *запропоновано* дидактичні вимоги до прикладних задач, що сприяють формуванню вміння математичного моделювання;

- *створено* добірку прикладних задач для курсу алгебри основної школи;

- *описано* етапи розв'язання прикладних задач;

- *запропонован*о модель формування вміння математичного моделювання.

Методологічною основою дослідження є положення: концепції діяльнісного та особистісно-орієнтованого підходу до навчання (Л. С. Виготський [36], О. М. Леонтьєв [90], С. Л. Рубінштейн [146], І. С. Якиманська [206, 205] та інші вчені), теорії розвивального навчання (В. В. Давидов [48, 49], Д. Б. Ельконін [202, 201], І. С. Якиманська [205] та інші науковці), теорії проблемного навчання та прикладної спрямованості математичних дисциплін (Г. М. Возняк [33, 34, 35], Ю. М. Колягін [74], М. О. Терешин [170], В. В. Фірсов [177], І. М. Шапіро [193, 194] та інші вчені), теорії математичного моделювання (Б. В. Гнеденко [39], А. М. Колмогоров [71], А. Д. Мишкіс [111, 108], О. А. Самарський [151], А. М. Тихонов [171] та інші науковці), робіт з методики навчання математики (Г. П. Бевз [11, 12, 7], О. С. Дубинчук [54], З. І. Слєпкань [158, 159] та інші науковці-методисти); державна національна програма «Освіта», Державний стандарт базової і повної середньої освіти (освітня галузь «Математика») [51], Закон України «Про освіту» [60], Концепція нової української школи та інші нормативно-правові документи Міністерства освіти і науки України.

Практична значущість результатів дослідження полягає в тому, що:

- *запропоновано* психолого-педагогічні засади формування в підлітків уміння математичного моделювання;
- *розроблено* методичні рекомендації, добірку прикладних задач і впроваджено в практику роботи освітніх закладів, де відбувався формувальний експеримент;
- *розроблено* методику формування в учнів основної школи вміння математичного моделювання під час вивчення курсу алгебри.

Обґрунтованість і вірогідність одержаних результатів дослідження забезпечується методологічними основами дослідження, аналізом теоретичного і емпіричного матеріалу з теми дослідження, відповідністю методів дослідження меті та завданням, впровадженням результатів дослідження у навчальний процес, відповідно позитивними результатами педагогічного експерименту.

Упровадження результатів дисертаційної роботи в педагогічну практику підтверджено довідками шкіл: Комунального закладу «Ліцей «Науковий» Міської ради міста Кропивницького» (протокол № 2 від 17.12.2020), Рівненської загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 6 (довідка

№ 49 від 16.06.2020), комунального закладу «Луцький навчально-виховний комплекс № 26 Луцької міської ради Волинської області» (довідка № 01-14/223 від 12.06.2020), комунального закладу «Навчально-виховний комплекс «Долинська гімназія – загальноосвітня школа I–III ступенів № 3 Долинської районної ради» (протокол № 4 від 05.03.2020), Глухівської загальноосвітньої школи I–III ступенів № 1 Глухівської міської ради (протокол № 5 від 28.05.2020), Міжлиманської загальноосвітньої школи I–III ступенів Біляївського району Одеської області (протокол № 4 від 29.05.2020).

Особистий внесок здобувача в одержанні наукових результатів полягає в обґрунтуванні важливості розроблення методики формування в учнів основної школи вміння математичного моделювання; у розробленні структурних компонентів методики формування вмінь математичного моделювання в учнів основної школи під час вивчення алгебри; у впровадженні результатів дослідження в практику навчання алгебри у 7–9 класах загальноосвітніх навчальних закладів; в опублікуванні одноосібних статей і тез, що віддзеркалюють результати дослідження, і публікацій у співавторстві. Особистий внесок дисертанта у працях, опублікованих у співавторстві становить понад 50%.

Апробація результатів дослідження. Основні результати дослідження представлено й обговорено на науково-практичних конференціях та семінарах:

− ***міжнародних науково-практичних конференціях*:** Міжнародна науково-практична конференція «Засоби і технології сучасного навчального середовища», КДПУ ім. В. Винниченка, м. Кіровоград (27–28 травня 2016 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова», м. Київ (11–13 травня 2017 р.); Международная научно-практическая конференция «Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы», Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка, Минск (10–13 мая 2017 г.);

VI Міжнародна науково-практична онлайн-інтернет-конференція «Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті», м. Кропивницький (19–20 квітня 2018 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Засоби і технології сучасного навчального середовища», ЦДПУ ім. В. Винниченка, м. Кропивницький (18–19 травня 2018 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми і перспективи фахової підготовки вчителя математики», Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця (30 травня–1 червня 2018 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Інноваційний потенціал сучасної освіти та науки», НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Київ (29 травня 2020 р.);

− ***всеукраїнських науково-практичних конференціях:*** Всеукраїнська науково-практична конференція «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи», Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, м. Одеса (15–16 вересня 2016 р.), Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю, м. Чернівці (11–12 жовтня 2018 р.), Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю «Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи», Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, м. Одеса (20–21 вересня 2019 р.).

− **Всеукраїнському науково-методичному семінарі** «Актуальні питання методики навчання математики», м. Київ НПУ імені М. П. Драгоманова (19 квітня 2017 р.).

Публікації. За темою дослідження опубліковано 24 наукові, навчальні та методичні праці, зокрема: 10 – у наукових фахових виданнях України, 2 – у науково-методичному журналі, 10 – у наукових матеріалах і тезах конференцій, 2 – у наукових виданнях зарубіжних країн (Молдова, Болгарія).

Структура й обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел (210 найменувань) на 23 сторінках та 17 додатків на 50 сторінках. Повний обсяг дисертації – 305 сторінок, основний текст – 203 сторінки. Дисертація містить 43 таблиці, 83 рисунка.

РОЗДІЛ 1.
ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики, зміст понять та їх визначення

Перебудова суспільства та зміни в освіті зумовлюють модернізацію вимог до освітнього процесу, формулюють нові завдання для вчителів та науковців. Відповідно до Стандарту базової і повної загальної середньої освіти [51] **основними завданнями освітньої галузі «Математика» є**:

– *розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності;*

– *оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;*

– *формування готовності і здатності застосовувати математичні методи у процесі розв'язування практичних задач, використовувати математичні знання та вміння під час вивчення суміжних навчальних предметів.*

Розв'язання окреслених завдань стимулює розвиток математичної освіти через посилення **прикладної спрямованості шкільного курсу математики** (далі ПСШКМ).

Проблему ПСШКМ досліджували в минулому й вивчають нині вітчизняні й зарубіжні науковці. Деякі дослідники розглядали її з позиції окремих навчальних дисциплін (геометрія, алгебра, алгебра і початки аналізу, стереометрія), інші – стосовно середньої, старшої та вищої шкіл.

Аналіз наукових досліджень з обраної проблеми засвідчує, що досить часто науковці вважають тотожними поняття *«прикладна спрямованість шкільного курсу математики»* і *«прикладна спрямованість навчання математики»*, однак, за нашим переконанням, вони мають відмінності.

Пропонуємо конкретні приклади для того, щоб чітко визначитися з тлумаченням змісту обох понять.

Зміст поняття ***прикладна спрямованість ШКМ*** уперше окреслив у 70-х р. радянський математик-педагог В. В. Фірсов. На думку вченого, сутність *прикладної спрямованості шкільного курсу математики* полягає в забезпеченні цілеспрямованого змістового й методологічного зв'язку шкільного курсу математики з практикою, що передбачає введення в математику специфічних підходів (евристичних міркувань), потрібних під час дослідження прикладних проблем математичними методами. Методологічний зв'язок математики з практикою виявляється у формуванні навичок, які за змістом є суто математичними, однак важливими для розв'язування задач, які виникають поза математикою (прикладних задач). Прикладна спрямованість, у дослідженнях вченого є однією із змістових ліній ШКМ, що знаходиться у тісному зв'язку з функціональною та іншими змістовими лініями. У працях В. В. Фірсова наголошено, що реалізація ПСШКМ можлива, якщо:

– *з-поміж компонентів математичної культури учня наявні правильні уявлення про математику та її застосування;*

– *курс математики виховує математичну інтуїцію, що ґрунтується на свідомому розумінні походження й застосування математичного об'єкта;*

– *середня освіта забезпечує оволодіння елементами математичної культури, пов'язаної із застосуванням математики до розв'язання прикладних задач* [178].

Поняття *прикладної спрямованості навчання математики*, що полягає в її застосуванні у суміжних науках, професійній діяльності, у сільському господарстві й побуті, пізніше сформулювали Ю. М. Колягін і В. В. Пікан. Автори акцентували на тому, що прикладна й практична спрямованості навчання математики функціонують разом, й визначили поняття практична й прикладна спрямованість навчання математики так: «*Практична спрямованість навчання математики – це спрямованість змісту й методів* *навчання на розв'язання вправ і задач, на формування в учнів навичок самостійної діяльності. Прикладна спрямованість навчання математики – це зорієнтованість змісту та методів навчання на застосування математики в техніці, професійній діяльності й суміжних науках*» [74, с. 27].

Згодом Є. В. Величко зауважив, що *прикладна спрямованість навчання математики* – це відбір змісту навчального матеріалу ШКМ, спрямований на його застосування в дійсності. На думку автора, це забезпечує формування позаматематичних умінь, які називають прикладними [30].

Своє тлумачення аналізованих понять запропонував також дослідник М. О. Терешин, за яким поняття *«прикладна спрямованість математики»* виявляється в змістовому і методологічному зв'язках ШКМ з практикою, що передбачає формування в учнів умінь, потрібних для розв'язання засобами математики практичних задач [170, с. 6]. За твердженням ученого, *«прикладну спрямованість шкільного курсу математики»*, представлено в її соціально-педагогічній і світоглядній функціях. Реалізацію соціально-педагогічної функції забезпечує професійне орієнтування учнів, тобто саме задачі сприяють економічному й екологічному вихованню. Світоглядна функція прикладної спрямованості виявляється в застосуванні математики на інших навчальних предметах, вивченні історії виникнення математичних понять, ознайомленні із застосуванням математичного моделювання реальних станів і процесів [170].

Інакше трактування, ніж у М. О Терешина, пропонує у Л. Е. Хайміна. У її дослідженні 1998 р. засвідчено, що *прикладна спрямованість навчання математики* – це навчання, зорієнтоване на застосування в освітньому процесі середньої школи змісту й логіки прикладної математики [183, с. 26].

Відповідно до поданих вище тлумачень можна зробити такі висновки:

– *зміст поняття «прикладна спрямованість навчання математики», окрім цілей і змісту навчання математики, охоплює також спрямованість методів, організаційних форм та засобів навчання (усі компоненти* *методичної системи навчання математики), зорієнтованих на систематичне розкриття взаємозв'язку прикладного (пов'язане з розв'язанням проблем за межами математики) і теоретичного (систематизація й узагальнення математичних понять) спрямувань математики;*

– *«прикладну спрямованість курсу математики» забезпечують переважно цільовий і змістовим компоненти методичної системи навчання математики.*

Як бачимо, обрані для вивчення поняття не є тотожними.

Проблему прикладної спрямованості ШКМ досліджували також і українські вчені. У 80-х р. ХХ ст. Г. М. Возняк і Е. П. Маланюк [33; 34] запропонували добірку екстремальних й оптимізаційних задач, яка демонструє застосування математичної теорії до розв'язування практичних задач, формує в учнів наукове світорозуміння. На їхню думку, основними напрямами поліпшення якості математичної освіти є підсилення її *практичного, прикладного й політехнічного спрямування*, що сприятиме формуванню пізнавального інтересу до математики, розвитку технічного мислення, виконуватиме профорієнтаційну функцію, проте у їх збірнику подано мало задач побутового й професійного змісту.

У процесі вивчення різних поглядів науковців з'явилися підстави сформулювати для нашого дослідження такі узагальнені трактування названих понять:

– *прикладна спрямованість шкільного курсу математики* – це зорієнтованість змісту й цілей освітньої діяльності на підготовку учнів до використання математичних знань і вмінь, специфічних мисленнєвих дій та індивідуальних особливостей у житті, майбутній професійній діяльності, під час вивчення суміжних дисциплін;

– *прикладна спрямованість навчання математики* – це вироблення уявлень про взаємозв'язок математики з суміжними дисциплінами та особливості використання математичних методів для їх вивчення;

формування та знань про сфери діяльності, у яких передбачено застосування математики; зорієнтованість методів, організаційних форм, засобів навчання на формування вмінь застосовувати математичний апарат до опису й дослідження реальних процесів і явищ та вмінь демонструвати математичні поняття на прикладах з життя, побуту.

Пропоновані визначення покладено в основу цього дослідження.

1.1.1. Прикладна спрямованість навчання шкільного курсу алгебри

З огляду на окреслену в дисертації проблему дослідження ми сформулювали таке визначення поняття *прикладна спрямованість навчання шкільного курсу алгебри (ПСНШКА):*

Прикладна спрямованість навчання шкільного курсу алгебри – це цілеспрямована зорієнтованість змісту, цілей, методів, організаційних форм і засобів навчання математики на здійснення методологічних і змістових зв'язків курсу алгебри з практикою; формування в учнів, під час вивчення алгебри математичних умінь і навичок, потрібних у побуті, професійній і науковій діяльності.

Відповідно до сформульованого визначення було розроблено дидактичну схему реалізації ПСНШКА (рис. 1.1).

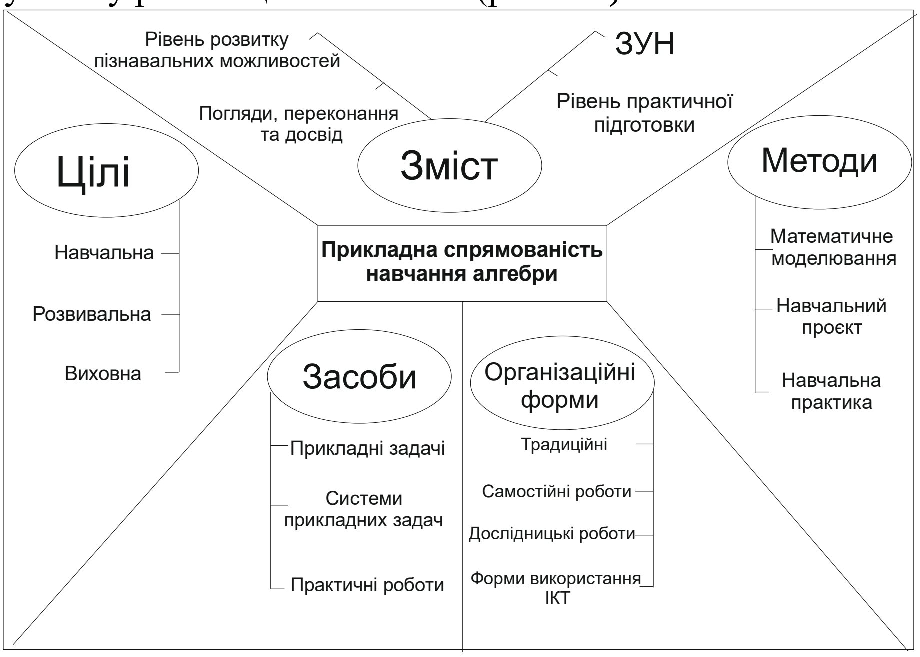


Рис. 1.1. Дидактична схема реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу алгебри

Основними компонентами схеми є *цільовий* (ґрунтується на конкретних кроках, завданнях для реалізації прикладної спрямованості навчання алгебри); *змістовий* (забезпечується прикладним змістом навчального матеріалу); *методичний* (методи, форми, засоби навчання математики, що забезпечують реалізацію прикладної спрямованості).

Сформулюємо загальні цілі навчання шкільного курсу алгебри з позиції реалізації прикладної спрямованості:

1. Забезпечення розвитку логічного, критичного й творчого мислення школярів, формування в них розумових дій: аналізу, синтезу, абстрагування, узагальнення, порівняння, класифікація, аналогії.

2. Забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння математичної символіки, математичних формул і моделей, що описують властивості об'єктів, процесів та явищ.

3. Формування в учнів здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи в процесі розв'язування навчальних, практичних і прикладних задач, використовувати математичні знання й уміння під час вивчення суміжних навчальних предметів.

4. Забезпечення розвитку в учнів умінь самостійно опрацьовувати математичні тексти, шукати й використовувати додаткові навчальні відомості, критично оцінювати здобуті повідомлення та їх джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати здобуті знання в житті.

5. Формування в учнів здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язання математичних задач.

6. Вироблення в учнів уміння самостійно створювати власні прикладні задачі для конкретного навчального матеріалу на основі заданого аналітичного виразу або без нього.

7. Розкриття глибоких зв'язків математики з іншими дисциплінами.

З огляду на сформульовані загальні цілі вивчення курсу потрібно визначати прикладні цілі до конкретного уроку. Наведемо приклад такого підходу. Під час вивчення однієї із змістових ліній курсу алгебри «Функції та їх графіки» потрібно ввести поняття лінійної функції. Для цього навчальну мету (ціль) можна сформулювати так: *навести приклад природних, міжпредметних та побутових процесів, які описуються за допомогою математичної моделі – лінійної функції; показати застосування її властивостей і графіка для розв'язання практичних і прикладних задач*.

На основі чинної Навчальної програми з математики [112, с. 10 – 25] ми розкрили *змістовий компонент* дидактичної схеми (рис. 1.1) й очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів у процесі вивчення курсу алгебри основної школи, доповнивши її відповідними темами (див. додаток Д).

Продемонструємо сказане на прикладі навчальної теми «Функції». У змісті навчального матеріалу передбачено теми: «Лінійна функція як математична модель прикладної задачі», «Лінійні залежності у побуті, професійній діяльності та у суміжних дисциплінах». Очікувані результати після вивчення теми: учень розв'язує прикладні задачі, у яких математична модель – лінійна функція, уміє будувати та досліджувати математичні моделі процесів, описаних за допомогою лінійної функції.

Отже, зміст навчання алгебри повинен забезпечувати максимальні умови для формування й збереження інтересу учнів до вивчення алгебри; засвоєння знань усіма учнями в умовах визначеного на тему часу; розвитку інтелектуальних здібностей учнів.

У процесі дослідження ми уточнили також компоненти дидактичної схеми ПСНШКА, а саме удосконалили цілі і зміст навчання алгебри з позиції прикладної спрямованості навчання алгебри. Специфіку застосування методів і організаційних форм викладено нижче.

1.1.2. Аналіз наукових досліджень і практики прикладної спрямованості навчання шкільного курсу математики

Результати дослідження питання прикладної спрямованості викладено в багатьох працях, з-поміж яких методичні, педагогічні й психологічні питання. Ми узагальнили їх за конкретними напрямами й подали в таблиці (див. табл. 1).

Таблиця 1

Питання, які вивчалися	Науковці
Прикладна спрямованість математики	Г. П. Бевз [12], Я. С. Бродський, Г. М. Возняк [33], М. С. Гребенюк, М. В. Єгупова [57], Ю. М. Колягін [74], С. М. Лук'янова [93], А. Д. Мишкінс, Л. І. Нічуговська [115], В. В. Пікан [74], А. В. Прус [141], Л. О. Соколенко [161], М. О. Терешин [170], В. В. Фірсов [177], З. Я. Хаметова [184], В. О. Швець [198], А. Д. Александров, Б. В. Гнеденко [39], В. М. Глушков, А. М. Тихонов
Прикладна спрямованість навчання математики в середній школі	В. М. Монахов, С. І. Шварцбург, Ю. М. Колягін [72, 74], Н. Р. Гарбулаєв, С. А. Аллабергенов, М. П. Бараболін, С. С. Варданян, Г. М. Возняк [33], І. М. Шапіро [194]
Зв'язок математики з життям, міжпредметні зв'язки математики	Г. П. Бевз [11], Г. Д. Глейзер, О. І. Глобін [38], П. І. Денисов, С. Н. Дворяткіна [50], І. І. Зубова [61], С. В. Пасічнюк, В. О. Петров, О. Ф. Трепліна
Реалізація прикладної спрямованості через застосування прикладних задач	Е. В. Сухорукова [164]
Навчальна практика, практичні роботи як засіб реалізації прикладної спрямованості математики	Н. С. Вагіна [28], Р. Н. Матюгіна, В. Є. Тарасюк, Л. М. Короткова [76]
Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу	Л. О. Соколенко [161], В. О. Швець [160]
Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії	А. В. Прус, В. О. Швець [141]

Формування вмінь застосовувати математику за допомогою математичного моделювання	В. О. Швець, М. О. Філімонова [180], О. О. Гриб'юк [44], Г. Я. Дутка [55], Г. М. Морозов [110], А. Л. Нікітіна, Л.Л. Панченко [132], Т. В. Трачук, М. В. Крутихіна [84]

У працях, систематизованих у таблиці, досліджено шляхи й засоби реалізації прикладної спрямованості математики. Цікавими для нашого дослідження є ті, що стосуються основної та старшої школи.

На сьогодні в дисертаціях у повною мірою віддзеркалено питання реалізації прикладної спрямованості для старшої школи. Зокрема Л. О. Соколенко [161] розроблено методику реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу. У її праці визначено особливості змісту курсу та методичні вимоги до реалізації прикладної спрямованості.

У дослідженнях А. В. Прус [141] побудовано концептуальну модель реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії у якій здійснено системно-структурний розподіл змісту курсу та запропоновано відповідну методику, визначено й розроблено засоби реалізації прикладної спрямованості курсу стереометрії.

Реалізацію прикладної спрямованості математики в основній школі вивчала М. О. Філімонова. У її науковій праці [180] розроблено методику формування вмінь математичного моделювання (цілі, завдання, зміст, організаційні форми, методи й засоби) під час вивчення математики в 5 – 6 класах і геометрії в 7–9 класах.

У праці Н. С. Вагіної [28] методичну систему математичної підготовки у школі розширено практико-орієнтованим компонентом, оскільки авторка запропонувала практичні і лабораторні роботи, інтегровані навчально-практичні заняття, позакласні заходи прикладного спрямування, які рекомендовано проводити під час навчальної практики й у процесі навчання. Окрім того, визначено особливості планування, цілі, зміст і завдання навчальної практики учнів 5 – 8 класів загальноосвітніх навчальних закладів; подано практичні задачі з вимірювань на місцевості, запропоновано тематику екскурсій для учнів основної школи; розроблено завдання для практичних розрахункових робіт. З курсу алгебри основної школи запропоновано: економічні ігри (задач про цінні папери, податки та прибутки), інтегровані заняття, практичні роботи з використанням програм для дослідження функцій, розв'язування рівнянь та їх систем, комп'ютерне моделювання прямолінійного руху об'єктів.

Для реалізації завдань нашого дослідження, важливими також є праці російських науковців у яких представлено засоби й методи реалізації прикладної спрямованості математики в основній школі.

Уведення математичних практикумів для посилення прикладної та практичної спрямованості курсу алгебри запропонувала Л. М. Короткова [76]. У дослідженні вчена стверджує, що посилення прикладної та практичної спрямованості передбачає самостійну навчальну діяльність учнів, організовану із застосуванням нового для школи виду навчального посібника – математичного практикуму. Окрім того, вона формулює комплекс вимог до математичного практикум з-поміж яких: створення мотиваційного середовища для навчання; забезпечення формування нових знань, умінь і навичок та їх контролю; забезпечення засвоєння ідейно-змістових ліній курсу алгебри; створення умов для застосування.

Питання методики реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри основної школи досліджено в Л. Е. Хайміної [183] на прикладі вивчення функціональної лінії; розроблено також ланцюги прикладних задач й основні положення щодо методики їх використання під час вивчення функціональної лінії в курсі алгебри в основній школі.

На думку І. І. Зубової [61], реалізацію прикладної спрямованості навчання математики забезпечує використання системи текстових задач фізичного змісту й навчально-методичного комплексу реалізації прикладної спрямованості навчання математики на інтегрованих заняттях. У процесі дослідження І. І. Зубова визначила теоретичні основи прикладної спрямованості навчання математики на основі системи задач фізичного змісту, виокремила вимоги та розробила з їх урахуванням систему задач фізичного змісту, побудувала модель реалізації прикладної спрямованості навчання математики в процесі впровадження системи задач фізичного змісту, розробила програму інтегрованого семінару «Математика-фізика» (для учнів 8–9 класів).

Основним результатом дисертаційної роботи М. В. Єгупової [56] є запропоновані методичні основи побудови системи задач екологічного змісту (принципи побудови системи і вимоги до задач) для використання на уроках геометрії. Також учена наводить методичні розробки й рекомендації щодо впровадження задач з екологічним змістом у позакласну роботу з геометрії. У своїй докторській роботі [57] авторка пропонує розглядати однією із змістових ліній практичне застосування математики в школі й стверджує, що її потрібно конструювати для всіх розділів шкільного курсу математики.

У 2005 р. Т. О. Шашкова [195] розробила методику використання засобів реалізації прикладної спрямованості курсу математики основної школи в умовах диференціації навчання; сформулювала вимоги до їх відбору; вивчила вплив прикладного матеріалу на розвиток пізнавального інтересу й мотивації в учнів; окреслила шляхи посилення прикладної спрямованості позакласної роботи з математики в основній школі. Дослідниця розмежовує реалізацію прикладної спрямованості курсу математики в умовах диференційованого підходу до учнів одного класу й окремо до профільних класів основної школи. Перший підхід передбачає, з одного боку, добір змісту навчального матеріалу (добір прикладних задач різного рівня складності, добір завдань відповідно до інтересів учнів), а з іншого – добір методів і форм навчальної діяльності (доповіді, творчі завдання й дослідницькі роботи, розв’язання за зразком). Другий підхід щодо змісту математичної освіти забезпечує розроблення змісту для кожного профілю класу (чіткість викладу матеріалу, демонстрація багатоваріантності розв’язання задачі, збільшення кількості прикладних задач із суміжних дисциплін), а методи й засоби визначаються з урахуванням особливостей учнів цього напряму.

Аналіз наукових праць засвідчує, що реалізація прикладної спрямованості курсу алгебри 7–9 класів залишається проблемним питанням, яке спонукало нас до вибору теми дослідження.

Зміна освітніх завдань, зміст нових альтернативних підручників, навчальних програм і посібників повною мірою не розкривають питання реалізації прикладної спрямованості навчання алгебри в основній школі, саме тому **створення системи задач, які б забезпечували формування в учнів основної школи вміння математичного моделювання, стало предметом та метою нашого дослідження**.

Цілі й зміст прикладної спрямованості навчання алгебри ми сформулювали вище. Зупинимося на описі змісту інших компонентів дидактичної схеми реалізації прикладної спрямованості навчання алгебри.

1.2. Методи реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу алгебри

У результаті аналізу навчальної й науково-методичної літератури, а також досвіду навчання математики в школі з’ясовано, що найбільш поширеними й прийнятними методами реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу навчання математики є метод математичного моделювання, зокрема розв’язування прикладних задач; метод навчальних проєктів; використання навчальної практики та практичні роботи. Схарактеризуємо більш детально кожен з них.

1.2.1. Математичне моделювання як метод реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу алгебри

Активне пізнання світу, потреба у формулюванні чіткого й точного опису явищ, аналіз описів, їх порівняння з іншими повідомленнями, потреба в різних видах прогнозування, управління й організації природних процесів та суспільства вимагають широкого залучення математичних моделей. Створення, вивчення й використання математичних моделей – суть методу математичного моделювання, який застосовують на теоретичному й на емпіричному рівнях.

Використання моделювання в навчанні сприяє розв'язанню багатьох освітніх завдань з-поміж яких: активізація навчально-пізнавальної діяльності та процесу мислення; підвищення якості засвоєних з математики знань, свідомого сприйняття навчального процесу; досягнення єдності теоретичних та практичних знань і розуміння їх важливості в побуті, вивченні суміжних дисциплін.

В основі методу математичного моделювання лежить побудова моделі, тому, вважаємо за доцільне розглянути різні підходи до визначення понять «*модель*» і «*математична модель*» та визначити їх структуру.

Таблиця 2

Трактування поняття «модель» різними вченими

Науковець	Трактування поняття
В. А. Штофф [199]	*Модель* – це подумки представлена і матеріально реалізована *система*, яка, віддзеркалюючи чи відтворюючи дослідження, здатна заміщати його так, що її вивчення дає нам нову інформацію про цей об'єкт.
В. І. Скурихін [157]	*Модель представляє об'єкт, систему або поняття* в деякій формі, яка відрізняється від форми реального існування. Вона є засобом, що допомагає в поясненні, розумінні або вдосконаленні системи. Модель об'єкта може точно копіювати цей об'єкт або представляти його характерні властивості в абстрактній формі.
Л. М. Фрідман [182]	*Моделлю* деякого об'єкта А (оригіналу)

	називається *об'єкт В, у якомусь відношенні схожий на* оригінал А, обраний або побудований суб'єктом (людиною) К для однієї з цілей: *модель-замісник* (заміна А в уявній або реальній дії через те, що В є більш зручним для цієї дії за цих умов); *модель-представлення* (створення уявлення про об'єкт А завдяки об'єкту В); *модель-інтерпретація* (тлумачення/інтерпретація об'єкта А у вигляді об'єкта В); *модель-дослідницька* (дослідження об'єкта А за допомогою об'єкта В, завдяки вивченню об'єкта В);
Л. І. Нічуговська [115]	*Модель* («довга процесія символів») – *математичний опис* процесу або об'єкта, алгоритмічний опис об'єкта; формула, що визначає закон функціонування; графічне подання об'єкта (процесу) у вигляді графіка, блок-схеми, кривої, що характеризує динаміку досліджуваного процесу та низку інших форм і понять.
М. М. Амосов [5]	*Модель* – це система, у якій відношення між елементами в деяких межах віддзеркалюють іншу систему.

Із наведених вище тлумачень можна зробити висновок, що в описі поняття «модель» науковці виокремлюють такі істотні ознаки *«система», «алгоритмічний опис», «подібний об'єкт», «модель-замісник», «модель-дослідницька», «модель-інтерпретація»*.

За визначенням Ю. М. Мельникова, модель – це система з двох компонентів: інтерфейсного (опис позначень, визначення й способи знаходження значень величин та інших характеристик) і модельно-змістового (множина елементів, множина функцій, множина відношень) (рис. 1.2). У нашому дослідженні наведену структуру моделі обрано опорною, оскільки з її допомогою можна визначити дії, потрібні для побудови моделі [101].

Рис. 1. 2. Структура моделі за Ю. Б. Мельніковим

На думку А. М. Тихонова, математична модель – це наближений опис будь-якого класу явищ навколишнього світу за допомогою математичної символіки [171], а І. І. Блехман уважає, що математична модель може бути відрізком, функцією, вектором, матрицею, скалярною величиною або навіть конкретним числом. У дослідженні А. П. Тонкіх математичну модель представлено як наближений опис якого-небудь явища зовнішнього світу, що виражається за допомогою математичної символіки [173].

Проаналізувавши різні підходи до тлумачення понять «математична модель», ми у своєму дослідженні дотримуємось такого визначення: *«Математична модель – це ідеалізований опис об’єкта, процесу, явища за допомогою математичних понять, символіки, формул, рівнянь, нерівностей, функцій, графіків, діаграм тощо»*.

У працях Н. Г. Салміної моделювання визначено як опосередковане пізнання дійсності з використанням замісників, а основна характеристика моделі полягає в тому, що вона є замісником. Авторка вважає моделювання методом дослідження й засобом засвоєння [150].

За твердженням А. А. Самарського й А. П. Михайлова, математичне моделювання э процесом установлення відповідності реальному об’єкту деякого математичного об’єкта, що називається математичною моделлю [151].

З іншого боку, математичне моделювання – це метод дослідження явищ, процесів або систем у процесі вивчення їх математичних моделей, тобто сукупності рівнянь, які описують об’єкт дослідження [109].

З огляду на вищесказане ми прийняли таке визначення поняття: *«Математичне моделювання – це метод дослідження об’єкта, процесу або явища дійсності, який передбачає побудову, аналіз та дослідження його математичної моделі»*.

Важливо в процесі математичного моделювання дотримуватися низки вимог (таблиця 3).

Таблиця 3

Вимоги до математичних моделей за В. І. Скурихіним

Точність	Властивість, що віддзеркалює збіг передбачених з її допомогою значень параметрів об’єкта з істинними значеннями цих параметрів (експериментально отриманими).
Економічність	Визначається затратами часу. Кількість внутрішніх параметрів, використаних у моделі. Збільшення їх кількості збільшує час, потрібний на їх оброблення.
Ступінь універсальності	Визначається її застосовністю до аналізу групи однотипних об’єктів.

З-поміж елементів математичного моделювання В. О. Стукалов виокремлює такі:

– заміна початкових термінів обраними математичними еквівалентами;
– оцінка повноти початкової інформації й уведення за потреби додаткових числових даних;
– вибір точності числових значень, що відповідають задачі;
– виявлення можливості отримання даних для розв’язання задачі на практиці.

Основними *дидактичними функціями* математичного моделювання є:

1. *Пізнавальна:* формування пізнавального образу об’єкта, що вивчається, в процесі руху від простого до складного.

2. *Управлінська:* орієнтування під час розв’язування задач, контроль правильності розв’язку й виявлення помилок, комунікація в процесі пояснення розв’язання.

3. *Інтерпретаційна:* той самий об’єкт можна виразити різними моделями, тому важливо правильно обрати модель до конкретного завдання.

4. *Інші функції:* естетична, забезпечення запам’ятовування, уваги, повторення [170].

Розглянемо дослідження, у яких описано особливості застосування методу математичного моделювання в освітньому процесі.

У праці В. О. Стукалова [163] визначено зміст основних понять, важливих для формування в учнів уявлень про математичні моделі, розроблено загальну методичну схему навчання побудови математичних моделей. Учений наголошує на тому, що ознайомлення з елементами математичного моделювання потрібно здійснювати на кожному етапі навчання. Розроблену ним методику спрямовано на формування уявлень про математичне моделювання, пов’язане з розв’язанням прикладних задач і розраховане на учнів 7 – 10 класів (актуальна лише для факультативів).

У дослідженні Г М. Морозова [110] представлено методику навчання учнів 7–10 класів математичного моделювання в процесі побудови математичних моделей. Автор описав основні розумові дії, потрібні для побудови математичних моделей:

– виокремлення системи основних характеристик;
– визначення системи зв’язків моделі;
– знаходження системи її обмежень.

Дослідник наголошує на важливості застосування математичного моделювання під час уведення понять, а також у процесі розв’язування прикладних задач. Також автор указує на те, що навчання учнів математичного моделювання має бути проблемним та дослідницьким.

У дисертації Л. Г. Петерсон [134] подано прийоми введення в навчання функціональних понять засобами моделювання об’єктів і явищ реального світу; розроблено теоретичні аспекти використання моделювання під час вивчення поняття функції; визначено завдання ознайомлення молодших школярів (учнів 4 – 6 класів) з математичними поняттями, установлено шляхи ознайомлення учнів з поняттями «математична модель», «математичне моделювання»; розроблено рекомендації для школи, що сприяють активізації вивчення задач на рух, графіків руху, прямої й оберненої пропорційності, уведення поняття функції. Авторка вважає, що моделювання є процесом створення й дослідження моделі для отримання нових знань про оригінал, а математичним моделюванням є процес побудови й дослідження математичних моделей. Окрім того, пропонує загальну структуру моделювання об’єктів і явищ: вибір моделі чи її побудова; вивчення моделі; перенесення здобутих знань на оригінал.

За твердженням В. С. Билкова [27], у процесі формування в учнів 9 – 10 класів елементів математичного моделювання у курсі алгебри і початків аналізу важливо враховувати такі його етапи:

– структурний аналіз об’єкта; досліджуваний об’єкт представляють як сукупність більш простих складників, пов’язаних відношеннями;
– уточнення цілі вивчення об’єкта; вибір математичних засобів опису;
– побудова математичної моделі; формально-логічний аналіз побудованої моделі;
– інтерпретація результатів аналізу моделі; уточнення моделі.

Відповідно до названих етапів математичного моделювання запропоновано такі типи вправ: на відбір даних, потрібних для дослідження ситуації; на відбір даних, потрібних для розв’язання задачі; на уточнення цілі вивчення об’єкта; на присвоєння елементам словесного опису об’єкта їх математичних еквівалентів; на вибір методу дослідження побудованої моделі; на виконання всіх компонентів моделювання.

На думку А. В. Прус, методика реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії ґрунтується на систематичному застосуванні математичного моделювання. Авторка поділила курс стереометрії на дев'ять навчально-математичних теорій, представлених у порядку їх вивчення в курсі стереометрії. Кожну з яких розглянуто за такими ступенями:

– емпірична основа;
– створення математичної моделі;
– результати дослідження математичної моделі;
– прикладання математичної моделі.

Такий структурний розподіл дає змогу вчителеві зрозуміти загальний механізм забезпечення прикладної спрямованості курсу стереометрії, а учневі – суть математичного моделювання як основи пізнання та зв'язок з майбутньою професійною діяльністю [141].

У процесі наукового пошуку Л. О. Соколенко розробила методику реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу, яка сприяє:

– підвищенню рівня викладання курсу;
– мотивації та ефективності навчання;
– формуванню в учнів умінь виконувати основні етапи математичного моделювання й готуватися до практичної діяльності.

Дослідниця створила систему прикладних задач до основних змістових ліній курсу та розробила методику навчання учнів їх розв'язування з урахуванням розумових дій, що є складниками діяльності в процесі їх розв'язування [161].

У праці В. В. Фірсова [177] окреслено три етапи застосування математики до будь-якої практичної задачі: перехід від ситуації, яку потрібно розв’язати, до її формальної математичної моделі – етап *формалізації*; розв’язання поставленої математичної задачі – *розв’язання* задачі всередині побудованої математичної моделі; третій етап – *інтерпретація* отриманого розв’язку математичної задачі, застосування його до початкової ситуації.

За твердженням А. А. Самарського й А. П. Михайлова [151] процес математичного моделювання передбачає дотримання таких етапів: обрати або побудувати «еквівалент» об’єкта, що віддзеркалює в математичній формі його властивості (закони, зв’язки); дослідити математичну модель або її частини теоретичними методами, у результаті чого отримати знання про об’єкт; вибрати або розробити алгоритм для реалізації моделі за допомогою комп’ютера; перевести модель й алгоритм на мову комп’ютера.

У процесі дослідження етапів математичного моделювання, за якими здійснюється процес розв’язання задачі, ми зосередили увагу на поданих у працях В. В. Фірсова, А. А. Самарського, А. П. Михайлова, В. О. Стукалова, Л. Л. Панченко та інших науковців. На нашу думку, для курсу алгебри основної школи актуальними є етапи математичного моделювання, які представлено в таблиці 4.

Таблиця 4

Етапи математичного моделювання

Етап	***Діяльність***
І. Формалізація *(побудова математичної моделі: виразу, рівняння, функції тощо)*	Попередній аналіз об’єкта дослідження.
	Побудова математичної моделі досліджуваного об’єкта.
	Вибір найбільш раціональної моделі.
ІІ. Дослідження побудованої математичної моделі *(розв’язання рівняння, обчислення значення виразу, дослідження функції тощо)*	Дослідження математичної моделі математичними методами.
	Вибір раціонального методу дослідження моделі і його проведення.
ІІІ. Інтерпретація розв’язку *(обґрунтування результату з точки зору досліджуваного об’єкта)*	Аналіз отриманих розв’язків.
	Порівняння одержаних результатів та перенесення їх на досліджуваний об’єкт.
	Інтерпретація результату дослідження з потрібною точністю.

Математичні моделі їх класифікація і місце в курсі алгебри. Як виявилося, на сьогодні розроблено велику кількість різних підходів до класифікації математичних моделей, тому зупинимося детальніше лише на тих, які стосуються шкільного курсу алгебри.

За твердженням Л. М. Фрідмана слід розрізняти матеріальні та ідеальні моделі. Цю класифікацію ми представили в схемі (рис. 1.3). На думку вченого, використання моделювання в навчанні вимагає реалізації двох аспектів: представлення методу моделювання в змісті навчання (ознайомлення учнів з поняттям моделі й моделювання, оволодіння методом моделювання для розв'язання практичних задач); використання моделювання як навчальної дії (учні, розв'язуючи практичну задачу, розуміють, що вона є знаковою моделлю деякої реальної ситуації, складають її модель, вивчають та перетворюють її розв'язання на мову початкової задачі).

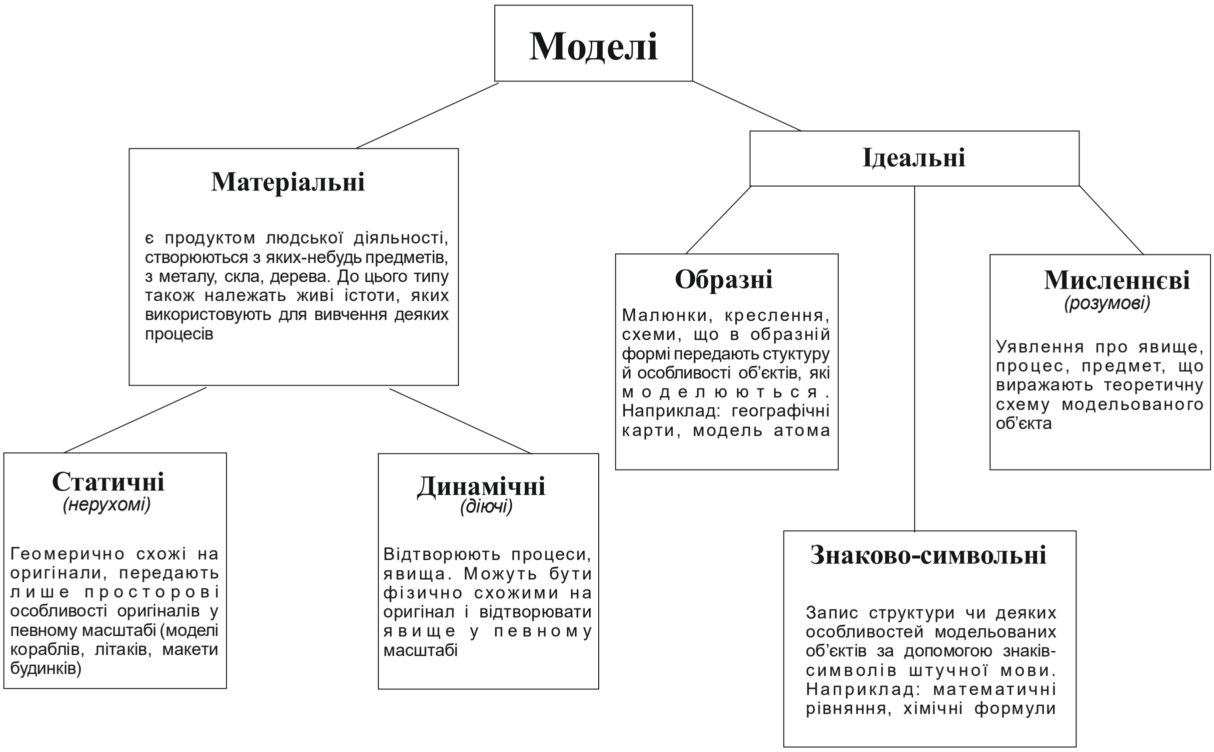


Рис. 1.3. Види моделей за Л. М. Фрідманом

Погляди В. Д. Федорова на класифікацію математичних моделей є дещо схожими на попередньо описані. Зокрема автор, за типом реалізації виокремлює *ідеальні* та *реальні моделі. Реальні моделі* (аналогові, натурні) віддзеркалюють суттєві риси оригіналу; *ідеальні* (знакові) – це умовний опис системи-оригінала за допомогою символів та операцій над ними. У результаті отримують слова й речення, які можна інтерпретувати як образи властивостей елементів оригіналу й зв'язків між ними. Найбільший інтерес для математики становлять *ідеальні моделі,* які поділяють на *концептуальні* (вербальні, графічні) і *математичні*. Математичні моделі можуть бути *аналітичними* (оператор відомий в аналітичній формі) або *чисельними* (імітаційними). Усі вони поділяються на дискретні – неперервні; детерміновані – стохастичні; точкові – просторові; статичні – динамічні [175, с. 66].

З огляду на підхід Л. М. Фрідмана, в курсі алгебри використовують моделі *допоміжні* й *розв'язувальні*. Допоміжні використовують для запису, аналізу умови задачі й пошуку її розв'язання. Розв'язувальні – це математичні моделі, у результаті розв'язання яких отримують відповідь на питання, поставлене в умові задачі. Важливо зазначити, що формулювання задачі та її короткий запис також є її моделями.

Відповідності до запропонованих теоретичних викладок ми виокремили математичні моделі курсу алгебри основної школи, з якими учнів потрібно ознайомити й навчити застосовувати під час розв'язування прикладних задач (див. таблиця 5).

Таблиця 5

Математичні моделі курсу алгебри

<table>
<tr><th>Змістова лінія</th><th>Тема</th><th>Види математичних моделей</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Вирази і їх перетворення</td><td>Цілі вирази</td><td rowspan="3">Знаково-символьні моделі: цілий вираз як математична модель, раціональний вираз як математична модель, ірраціональний вираз як математична модель.
Образні моделі: рисунки, схеми діаграми.</td></tr>
<tr><td>Раціональні вирази</td></tr>
<tr><td>Ірраціональні вирази</td></tr>
</table>

Функції та їх графіки	Лінійна функція	*Знаково-символьні моделі:* лінійна функція як математична модель, функція $y=\frac{k}{x}$ як математична модель, квадратична функція як математична модель, функція $y=\sqrt{x}$ як математична модель. *Образні моделі:* графік функції, таблиці значень функції, рисунки, діаграми.
	$y=\sqrt{x}$ $y=\frac{k}{x}$	
	Квадратична функція	
Рівняння та нерівності	Лінійні рівняння та їх системи	*Знаково-символьні моделі:* Лінійне рівняння як математична модель, квадратне рівняння як математична модель, лінійна нерівність як математична модель. *Образні моделі:* графік рівняння, числовий проміжок, рисунки, діаграми.
	Квадратні рівняння	
	Числові нерівності та їх системи	

Метод математичного моделювання є одним з методів розв’язування прикладних задач, оскільки в математичних моделях розкривається зв’язок математики з навколишнім світом. У нашому дослідженні розроблено методику формування в учнів умінь здійснювати математичне моделювання під час розв’язання прикладної задачі. Забезпечення в учнів розуміння того, що в процесі розв’язання прикладної задачі використовують різні види математичних моделей (моделі формулювання умови, розв’язувальні, допоміжні), кожна з яких має своє значення і виконує конкретні функції, вільне оперування етапами математичного моделювання є важливими умовами формування в учнів уміння здійснювати математичне моделювання.

Отже, основні завдання, які розв’язує математичне моделювання: посилює мотивацію та пізнавальний інтерес учнів під час вивчення математики; допомагає освоїти й зрозуміти навколишній світ; сприяє розвитку математичних компетентностей; забезпечує формування наукової картини світу.

Уміння математичного моделювання під час навчання алгебри в основній школі можна сформувати в процесі розв’язування прикладних задач, у яких представлені вище моделі є опорними, тому саме їх використовують для розв’язування таких прикладних задач, оскільки вони є засобом вироблення вміння математичного моделювання. З огляду на викладене стверджуємо, що на сьогодні існує потреба в створенні такої системи прикладних задач, застосування якої в освітньому процесі забезпечить учням свідоме володіння усіма етапами математичного моделювання.

1.2.2. Навчальний проєкт як метод реалізації прикладної спрямованості навчання курсу алгебри

Нині метод проєктів став популярним і широко вживаним, оскільки потребу в ньому зумовлено тим, що структура й організація дослідницького проєкту дає змогу залучити учнів до групової роботи, упровадити в навчання проблемний підхід, створити для школярів атмосферу наукового й практичного дослідження, посилити виховний і розвивальний вплив на особистість, забезпечити її самовираження. Окрім того, метод проєктів сприяє формуванню уміння розв’язувати побутові і професійні проблеми, що виникають у житті людини, однак важливішою перевагою використання методу є те, що він демонструє гармонійне застосування теоретичних знань та їх практичне значення.

На думку А. В. Хуторського, «навчальний проєкт – це форма організації занять, що передбачає комплексний характер діяльності усіх його учасників щодо отримання навчальної продукції за певний проміжок часу – від одного уроку до декількох місяців» [83, с. 199].

Підґрунтям методу проєктів є пошукова та дослідницька діяльність з хронологічними межами й чіткою структурою, результатом якої обов’язково повинен стати кінцевий унікальний продукт, завчасно очікуваний учнем.

Проєктна діяльність учнів є пріоритетним і соціально значущим видом пізнавальної діяльності, що дозволяє реалізувати різні напрямки модернізації сучасної освіти, з-поміж яких прикладна спрямованість курсу алгебри, **проте реалізація проєктної діяльності учнів у процесі вивчення алгебри через специфіку, змісту предмету, можливості учнів, відсутність методичного забезпечення є недостатньо розв'язаною проблемою.**

Зазначимо, що *навчальний проєкт* – це дидактичний засіб, що залучає учнів до практичної та дослідницької діяльності на основі поетапного планування. У процесі роботи над проєктом учень інтегрує знання, які він здобув у межах предмету з міжпредметними знаннями та власним досвідом.

Метод проєктів дозволяє досягти цілої низки навчальних цілей:

- розвивати мислення, уяву, пам'ять, увагу та мовлення учня;
- формувати позитивну мотивацію до навчальної діяльності;
- розвивати саморегуляцію та самоконтроль;
- розвивати комунікативні здібності;
- демонструвати зв'язок теорії з практикою.

Під час проєктної діяльності учень працює самостійно (збір та опрацювання експериментальних даних) або в групі (створення та захист проєкту). Успішне застосування обох із форм такої роботи сприяє результативності проєкту загалом.

На наш погляд, типи навчальних проєктів за різними аспектами, представлені в таблиці 6 [46], рекомендовано використовувати в освітній діяльності.

Таблиця 6

Типи навчальних проєктів

За змістом	монопредметний, міжпредметний, надпредметний
За тривалістю	короткостроковий, середньостроковий, довгостроковий
За типом діяльності	дослідницько-пошуковий, інформаційний, рольовий, творчий, прикладний

За формою проведення	урок-проєкт, екскурсія, виставка, фестиваль, відеопроєкт
За характером контактів між суб'єктами	учасники одного віку, учасники різного віку
За характером координації діяльності	з безпосередньою координацією, з прихованою координацією
За масштабом суб'єкта, який бере участь у проєктній діяльності	індивідуальний, парний, колективний, корпоративний

Зміст кожного з етапів роботи над проєктом і відповідні дії учнів на кожному з них – різні. Їх потрібно знати вчителеві, який планує навчальний процес.

Перший етап. З*анурення в проєкт* (учні вивчають проблему, виокремлюють і формулюють цілі й завдання, вивчають окреслені завдання, аналізують актуальність проблеми).

Другий етап. *Організація діяльності* (розподіл на групи, якщо це передбачено типом проєкту, та розподіл обов'язків між членами групи, планування роботи, вибір засобів і методів, планування послідовності та встановлення часових меж виконання завдань, визначення форми презентації результатів).

Третій етап. *Діяльність* (активна робота над пошуком та опрацюванням отриманих даних з теми, розв'язання поставлених завдань, дотримання встановленого часового графіку).

Четвертий етап. *Презентація результатів* (оформлення й представлення результатів виконаних завдань, оцінювання здійсненої роботи).

Під час проєктної діяльності в учнів формуються такі вміння:

- здійснювати математичне моделювання;
- співпрацювати в команді;
- здійснювати пошук даних;
- оцінювати результат;
- презентувати отриманий результат;

– виконувати обов’язки менеджера (планувати діяльність, приймати рішення, розподіляти обов’язки).

Основними рисами методу проєктів як засобу реалізації прикладної спрямованості є предметні результати; установлення міжпредметних зв’язків; розвиток кругозору; формування позитивної навчальної мотивації; забезпечення емоційного зв’язку з навчальним матеріалом; перенесення знань на ситуацію, що виникла на практиці; інтелектуальний, особистісний та творчий розвиток; формування уміння працювати самостійно або в колективі; поєднання теорії й практики, що робить теорію реальною; посилення почуття відповідальності.

У процесі нашого дослідження розроблено теми навчальних проєктів для курсу алгебри основної школи, які сприяють формуванню в учнів уміння математичного моделювання (див. табл. 7).

Таблиця 7

Орієнтовні теми проєктів з курсу алгебри основної школи

Клас	**Тема проєкту**	**Завдання**
7	Відсоткові розрахунки в побуті й професійній діяльності.	Виробити мотивацію до вивчення математики; уміння планувати роботу; навчити виконувати дослідницьку діяльність; продемонструвати зв’язок математики з іншими предметами; формувати вміння виконувати роботу самостійно.
	Лінійна функція та майбутня професійна діяльність.	
	Використання лінійних нерівностей у фізиці.	
	Задачі на суміші та сплави у фізиці та хімії.	
8	Наближені обчислення в реальному житті	Навчити самостійно організовувати розумову діяльність, оцінювати результати власної діяльності, установлювати й демонструвати міжпредметні зв’язки.
	Квадратні рівняння у фізиці та геометрії.	
	Застосування квадратного кореня.	
	Обернена пропорційність як математична модель реального процесу.	
9	Дії над числовими множинами в професійній діяльності.	Навчити відбирати матеріал, планувати свою роботу та роботу групи, презентувати свій проєкт,
	Прогресії в економіці.	

	Математичне моделювання в задачах на дорожній рух.	створювати суспільно важливі проєкти, обґрунтовувати актуальність обраної теми.
	Застосування методу математичного моделювання в агрономії.	

Зразки проведення і опис таких проєктів представлено в Додатках Е, Є, Ж.

Використання проєків підвищує результативність уроку й позаурочної діяльності. Основними позитивними рисами використання такого методу є розвиток творчих здібностей учнів; професійна зорієнтованість; виховання раціональної організації часу в роботі на проєктом; розвиток критичного мислення; навичок самостійної діяльності.

Метод проєктів, важливий, однак допоміжний, а не основний, оскільки є виступає компонентом, що об'єднує інші методи в єдиний навчальний процес.

1.2.3. Навчальна практика та практичні роботи як методи реалізації прикладної спрямованості навчання курсу алгебри

Для шкіл розроблено достатню кількість педагогічних програмованих засобів, проте завжди залишається актуальною проблема практичного застосування здобутих учнями знань. Частково розв'язати цю проблему можна під час літньої навчальної практики в основній школі.

Навчальна практика є обов'язковим складником освітнього процесу, основною метою якої є забезпечення зв'язку навчальних предметів з реальним життям, природою та технікою; посилення професійної та прикладної спрямованості змісту освіти; формування в учнів умінь, важливих для життя в сучасному світі; розширення світогляду.

Перевагою навчальної практики є те, що учні мають змогу за межами звичайного уроку продемонструвати свої знання. Під час навчальної практики учні розв'язують прикладні задачі; виконують практичні, лабораторні та проєктні роботи; здійснюють навчальні екскурсії; беруть участь у дидактичних іграх та позаурочних заходах.

Завданням практики є узагальнення й систематизація знань, умінь та навичок, набутих учнями впродовж навчального року; створення умов для наближення змісту навчального матеріалу до реального життя; розширення світогляду; підготовка до професійної діяльності, а саме, сприяння професійній спрямованості та зацікавленості навчальним предметом, виявлення внутрішньопредметних та міжпредметних зв’язків; розвиток творчих здібностей учнів. На нашу думку, основним цілями навчальної практики є розвиток умінь учнів застосовувати набуті знання на практиці, у житті, під час розв’язування прикладних задач, формування впевненості в застосуванні знань.

У праці Н. С. Вагіної розроблено методику організації й проведення навчальної практики учнів 5 – 8 класів, зокрема створено комплекси практичних, лабораторних робіт, інтегрованих навчально-практичних занять, позакласних заходів прикладного спрямування, які можна використовувати під час навчальної практики й в освітньому процесі. Авторка наголошує на тому, що організація навчально-практичних занять та екскурсій на предметній і міжпредметній основі демонструє спрямованість навчання на інтеграцію знань та гуманітаризацію змісту освіти. Представлено практичні роботи на місцевості з геометрії, лабораторні роботи з використанням програмного забезпечення. Програму навчальної практики поділено на змістові блоки: практикум з техніки обчислень; геометричний практикум; застосування математики в життєдіяльності; використання комп’ютерних засобів у навчанні; позакласна робота з математики. Для учнів 7 – 8 класу завдання зорієнтовано переважно на геометрію (практичні роботи та навчально-практичні заняття на місцевості), проте завдяки комп’ютерним засобам розроблено блоки, які також актуалізують знання з алгебри, окремо подано інтегровані навчально-практичні заняття [28].

Під час навчальної практики важливо вивчати виробничу діяльність підприємств для встановлення зв'язків математики з ситуаціями, які виникають на виробництві. Окрім того, можна здійснити експериментальні роботи із застосуванням математичних методів у сільському господарстві. Потрібно продемонструвати зв'язок математики з інформаційними технологіями. Також корисно розглянути зв'язок математики з трудовою діяльністю. Для цього найбільш ефективними є такі форми роботи: екскурсії, літній шкільний табір, клуб-майстерня, математична лабораторія, практичні чи вимірювальні роботи. Вимірювальні роботи на місцевості найкраще демонструють потенціал геометричного матеріалу, усі ж інші форми можна використати саме в алгебрі.

Ми розробили програму з практики з огляду положення інструктивно-методичного листа Міністерства освіти і науки України [107]. Навчальну практику в основній школі проводять у кінці навчального року протягом 10 днів (у 7 – 8 класах) по 4 академічні години на день. Наведемо приклад програми практики у 8-му класі на базі Редакційно-видавничого центру. Учні ознайомлюються зі специфікою роботи видавництва і застосовують знання з інформатики, а математика виступає змістовим наповненням книги, буклету, плакату, які є кінцевими продуктами діяльності після завершення практики. Детальніше програму практики викладено в Додатках Г, З.

Практичні роботи є актуальними для шкільних предметів фізика, біологія [162], хімія [37], інформатика [47, 200], географія [149], економіка [40], однак не варто зменшувати їх значення й у процесі вивчення математики. У дослідженні В. І. Тараник [165] розкрито методику використання практичних робіт з геометрії. Дослідник уважає,що практичні роботи з геометрії є дидактичним засобом цілеспрямованого розвитку самостійної пізнавальної діяльності учнів, представленої комплексом навчальних завдань, які передбачають взаємопов'язане надання планіметричного й стереометричного матеріалу з опорою на особистий досвід; самостійність в оволодінні знаннями й способами діяльності завершеного дослідницького циклу; навчання конструктивних методів розв'язання задач із застосуванням вимірювань, побудови, зображення, геометричного моделювання. Учені виокремлюють різні типи практичних робіт з-поміж яких настановні, ілюстративні, тренувальні, дослідницькі [166].

На розбіжностях між практичними й лабораторними роботами наголошувала З. І. Слєпкань. Лабораторні – це ті роботи, які пов'язано з вимірюваннями й обчисленнями, моделюванням фігур, побудовою графіків, діаграм, фігур під час геометричних перетворень у межах кабінету, а практичні – це роботи на місцевості, що передбачають складання плану ділянки, вимірювання висоти предмета, відстані до недосяжної точки [158].

У дослідженні М. О. Філімонової представлено комплекс вимірювальних робіт на місцевості, мета яких ознайомити учнів з найпростішими землемірними приладами, з методами розв'язування прикладних задач; навчати демонструвати геометричні поняття, властивості фігур, ілюструвати застосування методів математичного моделювання [180].

Усі наведені вище роботи стосуються вивчення геометрії. Розглянемо також практичні роботи для 5 – 6 класів, у яких передбачено не лише використання геометричного матеріалу, а і його поєднання з алгебраїчним.

Систему практичних робіт для учнів 5 – 6 класів наведено в праці М. А. Бугаєвої [24]. Дослідниця вважає, що практична робота – це самостійне розв'язання учнями проблеми прикладного змісту, яка не містить достатніх для формального розв'язання даних і вимагає позаматематичних дій (експериментів, досліджень, вимірювань). Також наголошує на тому, що ядром практичної роботи є прикладна задача, для розв'язання якої учні використовують математичне моделювання, тому саме це вміння є першорядним під час розв'язання прикладної задачі. Прикладом практичної роботи є розвиток звичайної задачі на знаходження площі прямокутника до прикладної задачі на знаходження поверхні стін кімнати і до практичної роботи для розрахунку вартості ремонтних робіт кімнати [23].

Вивчивши розглянуті дослідження, ми дійшли висновку, що вони переважно охоплюють геометрію й курс математики 5–6 класів. Деякі аспекти можна спроєктувати й на курс алгебри основної школи, проте неповною мірою.

Опрацювання науково-методичної літератури, дає змогу стверджувати, що практичних робіт з алгебри недостатньо, тому пропонуємо сформулювати такі вимоги до практичних робіт з математики для курсу алгебри основної школи:

- використовувати в процесі виконання практичної роботи математичні моделі, відомі учням;
- забезпечувати різноманітність ситуацій у змісті практичної роботи;
- зорієнтуватися на досвід учня;
- використовувати метод математичного моделювання;
- створювати умови для оволодіння новими способами практичної діяльності.

Важливо забезпечити такі умови, щоб практичні роботи були не ізольованими, а невіддільно пов’язаними з навчальним матеріалом.

Упровадження практичних робіт забезпечує розвиток творчих здібностей учнів; формування навичок самостійної діяльності; підвищення пізнавального інтересу учнів; розвиток світогляду, проте практичні роботи не основний метод, оскільки основним є метод математичного моделювання.

Відповідно до побудованої схеми ПСНШКА фундаментальним методом реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри є метод математичного моделювання, а інші методи виконують додаткову функцію й допомагають досягти ефективності у формуванні вміння моделювання.

Основним завданням нашого дослідження було створення системи прикладних задач, тому в наступному підрозділі ми описали розроблену нами систему прикладних задач (вимоги, види задач, що входять до її складу, та способи конструювання).

1.3. Система задач як засіб реалізації навчання прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри

Успішність і якість навчання математики значною мірою залежить від правильно дібраної системи задач, у процесі розв’язування яких в учнів формуються відповідні компетентності, тому важливим методичним завданням навчання алгебри в основній школі є створення такої системи задач, яка б посилювала ефективність навчального процесу. Задачі є важливим складником курсу, їх розв’язання сприяє закріпленню вивченого матеріалу, розвитку логічного мислення, формуванню наукового світогляду, розумінню застосування математичних теорій у реальних ситуаціях.

Математичні задачі, пропоновані для опрацювання в сучасній школі, здебільшого є ізольованими одиницями, що вимагають конкретних дій для їх розв’язання, однак учитель, який дає учням завдання, керується більш загальною метою, тому для досягнення навчальних цілей потрібно впроваджувати систему задач з обґрунтованою структурою, у якій кожний елемент віддзеркалює цю структуру.

Поняття *система задач* застосовуємо до тих, які або дібрано до теми, або в яких продемонстровано конкретний метод розв’язання. Деякі автори використовують поняття «ланцюги задач», «блоки задач», «серії задач», «цикли задач».

На думку Г. В. Дорофєєва, *циклами задач* слід називати взаємопов’язані задачі, різні за сюжетом, проте спільні за дидактичним призначенням. Задача в такому циклі має набір задач, пов’язаних з нею за змістом, методами роздумів [52]. За твердженням М. І. Зайкіна цикл задач може сприяти досягненню лише конкретної дидактичної мети, а послідовність розв’язування задач циклу має значення та обґрунтовується логікою розв’язання дидактичних задач [59].

У працях Д. Пойя розглянуто *ланцюги еквівалентних задач*, у яких спостерігається зв’язок кожної наступної задачі з попередньою, послідовність задач суворо фіксовано. Такий ланцюг задач дає змогу досягти загальної мети [135].

Задачні конструкції, тобто об’єднання задач за тематичною ознакою і складністю в *блоки,* для формування математичного мислення учнів розглянуто в дослідженні Е. В. Сухорукової [164].

Серії задач С. Е. Рукшин вибудовує за такими принципами: задачі, що стосуються одного об’єкта, проте розв’язуються різними способами; задачі, що розв’язуються на основі загального підходу; задачі, що послідовно розвивають одну або декілька ідей та їх комбінацій для розв’язання основної задачі, що віддзеркалює ідею, основну для всієї серії [147].

Відмінність між циклами, блоками, серіями, ланцюгами полягає у зв’язках між задачами, які представлено в їхніх структурах. Для ланцюгів властиві лінійні зв’язки між задачами, а в циклах, серіях та блоках вони розгалужені й послідовність переходу від задачі до задачі має певне значення.

Вивчення описаних підходів дозволяє зробити висновок, що пропоновані задачні конструкції розкривають побудову системи задач.

Під *системою задач ми розуміємо сукупність дібраних і розміщених певним чином задач, які відповідають поставленій меті, діють як ціле, взаємозв’язок яких зумовлює запланований результат*.

З-поміж основних системотворних критеріїв назвемо такі: відповідність задач дидактичним вимогам, підпорядкованість поставленим цілям та доцільне місце в освітньому процесі.

У процесі створення системи задач ми дотримувалися таких етапів: *теоретичний* (виявлення понять, фактів, умінь, які потрібно сформувати відповідно до програмних вимог; установлення зв’язків між поняттями; визначення типів уроків; формулювання мети уроків); *відбірковий* (добір задач відповідно до критеріїв відбору); *пов’язувальний* (установлення зв’язків між дібраними задачами, вибір методів конструювання); *структурувальний* (відповідно до способів упорядкування системи задач і до методів навчання формуються добірки задач для кожного уроку); *констатувальний* (перевірка відповідності створеної добірки задач сформульованим системним вимогам, за потреби коректування сконструйованих систем задач).

1.3.1. Основні вимоги до системи прикладних задач

У науково-методичних працях часто трапляються вимоги, вироблені до всієї системи задач і до кожної прикладної задачі зокрема. Уважаємо, що їх важливо розглянути більш детально.

У багатьох науковців вимоги до цілісної системи прикладних задач викладено по-різному (М. В. Крутіхіна, Л. О. Соколенко, І. А. Горчакова, Л. Л. Панченко, А. В. Прус, Л. І. Новицька, Т. А. Полякова, М. О. Філімонова).

Зокрема М. В. Крутіхіна [84] запропонувала структуру системи сюжетних задач, у яких потрібно передбачити:

1) задачі, сформульовані в термінах, що використовуються в житті й відрізняються за назвою від відповідних математичних понять;

2) задачі, які передбачають оцінку похибки;

3) задачі з недостатніми або надлишковими даними;

4) різні способи отримання вхідних даних (схеми, графіки, таблиці);

5) джерела отримання даних, які потрібно доповнити до заданих повинні бути різноманітними;

6) задачі, у яких потрібно здійснити відбір вхідних даних з врахуванням можливостей їх отримання на практиці.

З огляду на те, що під час розв’язування прикладних задач важливо застосовувати метод математичного моделювання, потрібно в системі передбачити додаткові складники:

7) задачі, що мають на етапі дослідження математичної моделі декілька розв’язків, причому обмеження накладені в умові задачі, не обов’язково повинні збігатися з обмеженнями, накладеними на математичну модель;

8) задачі, які виробляють уміння бачити в математичній моделі практичне значення;

9) задачі, що дозволяють поширити отримані висновки на практичні ситуації, схожі на ситуації в умові задачі [84, с. 54].

Дещо інший перелік вимог до системи прикладних задач курсу алгебри і початків аналізу запропоновано в дослідженні Л. О. Соколенко [161]: відбір задач повинен відповідати математичному змісту курсу; в основі класифікації задач системи є математичні моделі, які або створюються, або задані в умові; задачі повинні відповідати своїм функціям у навчальному процесі; під час розв'язування задач, потрібно спиратися на попередні задачі; уміння розв'язувати задачі певного типу повинно полегшувати розв'язування інших типів задач; відбір задач має бути диференційованим для різних типологічних груп учнів; задачі повинні сприяти міжпредметному узагальненню знань; мати актуальний зміст; використовувати алгоритмічний підхід; передбачати розв'язування однієї задачі різними способами; система повинна сприяти оволодінню прийомами евристичної діяльності. Автор типізує задачі залежно від математичної моделі, яка може бути степеневою, логарифмічною, тригонометричною чи іншою функцією, рівнянням, нерівністю й ін.

На думку І. А. Горчакової [42], система задач спрямована на розвиток евристик, повинна ґрунтуватися на принципах *зацікавленості* (учителю потрібно забезпечити учням можливість отримати задоволення від розв'язування математичної задачі, викликати інтерес до її розв'язання, зробити задачу привабливою для учнів визначеного віку), *наочності*, *евристичності* (уміння школярів розв'язувати задачі безпосередньо не залежить від кількості розв'язаних задач, оскільки якщо учень розв'язав багато задач, однак у нього не сформовано загального підходу до задачі, її аналізу, пошуку плану розв'язання, самостійно розв'язувати задачі він не зможе), *поступового нарощування складності* (поступовий розвиток усього задачного матеріалу). Окрім того, важливо дотримуватися вимог: повноти представлення евристик; дидактично доцільного співвідношення між логічною і евристичною компонентами навчання; спрямованості на відкриття; відповідності життєвій практиці учнів; комплексного і доцільного залучення традиційних і сучасних засобів навчання; забезпечення рівневої диференціації.

У процесі опису вимог до системи задач як засобу навчання студентів математичного моделювання Л. Л. Панченко [132] наголошує на тому, що система задач є інтегрованою й складається з підсистем, які мають такі риси: містять прикладні задачі, які виконують різні дидактичні цілі (навчальну, виховну й розвивальну); розв’язання задач здійснюється з урахуванням етапів математичного моделювання; за дидактичними цілями задачі є *тренувальними* (для вироблення стійких умінь і навичок) або *розвивальними* (для розвитку мислення, творчості).

У дослідженні А. В. Прус розроблено систему прикладних задач із стереометрії та методичні рекомендації для вчителів щодо її використання. Створена автором система передбачає формування вмінь та навичок використовувати здобуті знання в різних сферах життя людини і поєднує задачі за двома параметрами: навчально-методична тема та сюжет (частина реальності, якій відповідає задача). Сформульовано також вимоги до системи прикладних задач, з-поміж яких: «1) кожна прикладна задача системи повинна задовольняти вимоги, поставлені до окремої прикладної задачі; 2) прикладні задачі системи мають відповідати змісту шкільного курсу стереометрії; 3) прикладні задачі кожної підсистеми повинні бути розташовані за ступенем наростання складності; 4) прикладні задачі мають давати змогу здійснювати диференційований підхід до різних груп учнів; 5) система прикладних задач повинна сприяти оволодінню учнями прийомами алгоритмічної, евристичної та дослідницької діяльності»[141].

За твердженням Л. І. Новицької, система прикладних задач ефективна, якщо задовольняє такі методичні вимоги: відповідність методів і прийомів розв’язування навчальним програмам чинним підручникам з курсу математики; віддзеркалення умовою задач реальної виробничої ситуації та відповідність числових даних виробничим процесам і життєвим ситуаціям; понятійний апарат умови задачі, його термінологія мають бути відомими й зрозумілими студенту; дотримання символіки, позначень і статистичних даних, використаних у науковій літературі; задачі та їх розв’язання мають ілюструвати практичну значущість набутих математичних знань [118].

Аналіз вказаних вище досліджень засвідчує, що всі вимоги до системи задач можна розділити на такі групи: вимоги до структури системи; вимоги до задач системи; вимоги до функціонування системи як цілого, тому, під час створення добірки прикладних задач ми дотримувалися таких вимог до цілісної системи:

1. Вимоги до структури системи прикладних задач: ієрархічність (задачі пов’язані між собою змістовими зв’язками), раціональність (кількість задач у системі повинна бути достатньою, не перенасиченою і не викликати в учня відчуття надлишковості), наростання складності (задачі системи повинні забезпечувати рух від простого до складного).

2. Вимоги до функціонування системи прикладних задач: повнота (задачі системи повинні забезпечувати розкриття понять теми повною мірою), відповідність системи задач змісту освіти, цільова відповідність (задачі системи в поєднанні забезпечують виконання конкретних освітніх цілей).

У процесі узагальнення досягнень науково-методичних досліджень ми виокремили методичні вимоги (критерії) до системи задач, які дають змогу забезпечити ефективність навчального, розвивального й виховного впливів на учня.

1.3.2. Основні вимоги до прикладних задач системи

З огляду на дослідження В. В. Фірсова та А. В. Прус, у яких реалізацію прикладної спрямованості забезпечує використання різноманітних засобів виокремлюємо такі *засоби реалізації прикладної спрямованості курсу математики:*

– прикладні задачі;
– практичні та лабораторні роботи;
– міжпредметні зв’язки;
– застосування математичного моделювання;
– навчальна практика;
– навчальні проєкти з прикладним змістом;
– використання педагогічних програмних засобів (у разі моделювання реальних ситуацій);
– факультативи;
– застосування прикладів зв’язку теорії з практикою (зв’язок абстрактних понять математики з реальними об’єктами) [178].

Зупинимося детальніше на понятті «прикладна задача» і його різних визначеннях, які мають спільні та відмінні риси.

На думку І. М. Шапіро підсилення мотивації вивчення матеріалу можливе з використанням задач практичного змісту. Розв’язання таких задач є необхідним у житті, що обґрунтовує потребу у вивченні математичних методів. Учений стверджує, що *математична задача практичного змісту* (задача прикладного характеру) – це задача, фабула якої розкриває застосування математики в суміжних дисциплінах, демонструє її реалізацію в технології та економіці сучасного виробництва, у сфері обслуговування, побуті, під час виконання трудових обов’язків. Дослідник пропонує такі типи задач практичного змісту:

1) задачі на складання таблиць (повідомляється математичне правило, на основі потрібно заповнити таблицю; це може бути формула або графік).

2) задачі на визначення значень величин, що трапляються в практичній діяльності (розв’язання задачі зводиться до обчислення, наприклад, числового значення алгебраїчного виразу).

3) задачі на застосування та обґрунтування формул (пошук походження формул, їх доведення з використанням теоретичних знань, розв’язки можуть бути знайдені наближено).

4) задачі на виведення формул залежностей, що трапляються на практиці (розв'язання задач правильне, якщо наявні чіткі відомості про виробничий процес, про явище, яке потрібно описати мовою математики).

5) задачі на побудову функцій (побудова й визначення властивостей функцій, які описують залежності з практичного життя).

У праці вченого виокремлено дидактичні цілі прикладних задач, з-поміж яких: обґрунтування потреби у вивченні теоретичного матеріалу; підготовка до введення нових понять; ознайомлення з конкретними моделями абстрактної теорії; виявлення деяких властивостей відомих математичних об'єктів; установлення зв'язків вивченого й нового матеріалу; підготовка до доведення складних тверджень; ознайомлення з новими методами розв'язання задач; порівняння ефективності різних методів розв'язання однієї задачі [193; 194]. На нашу думку, такий підхід не забезпечує реалізації міжпредметних зв'язків споріднених з математикою наук (фізика, економіка, хімія, екологія тощо).

За словами М. В. Крутіхіної *прикладна задача* є сюжетною задачею, тобто такою, що сформульована, здебільшого як задача-проблема й задовольняє такі вимоги: а) питання задачі має потрібно формулювати згідно з практикою; б) дані й величини, які треба знайти, повинні бути реальними й здобуватися з навколишнього середовища. Розв'язання таких прикладних задач вимагає від учнів певних умінь, для формування яких можна використати не лише задачі-проблеми, а й задачі, для вироблення окремих умінь – навчально-прикладні задачі (за умови послаблення першої вимоги) [84].

У визначенні Є. В. Величка поняття прикладної задачі витлумачено через поняття фабульної задачі [30]. Автор уважає фабульні задачі тим матеріалом, який забезпечує проникнення об'єктів навколишньої дійсності в зміст навчального предмету. У таких практичних задачах фігурують нематематичні поняття з реального світу, вони віддзеркалюють реальність й описують ситуацію, відому учневі з особистого досвіду, літератури, інших навчальних предметів.

На думку М. О. Терешина [170], *прикладною* є задача, яка виникла за межами математики й розв'язується математичними методами.

У монографії М. Я. Ігнатенка [62] наголошено на тому, що прикладну спрямованість навчання ефективно можна реалізовувати під час розв'язування прикладних задач. Учений формулює основні вимоги до прикладних задач: практичність змісту, задач який забезпечує ілюстрацію практичної цінності; відповідність шкільним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів та фактів, які використовуються під час розв'язування; доступність у формулюванні без термінів, невідомих учням; реальність числових даних; віддзеркалення в змісті особистого досвіду учня, що дозволяє показати використання математичних знань і викликати пізнавальний інтерес; віддзеркалення ситуацій промислового й сільськогосподарського виробництва, економіки, ілюстрування можливостей застосування математичних знань у майбутній професії; наближеність числових даних, тому в процесі їх розв'язання потрібно використовувати обчислювальні засоби; під час розв'язування прикладних задач у профільних класах їх формулювання може бути розширеним, а розв'язання – багатоступеневим.

Деякі науковці трактують поняття «прикладна задача» в контексті того розділу математики, у якому її застосовують. З-поміж них:

− Л. О. Соколенко (прикладна задача курсу алгебри і початків аналізу), А. В. Прус (прикладна теоретична та практична стереометрична задача), Т. А. Полякова (прикладна задача стохастики) для старшої школи;

− Г. Я. Дутка (задачі економічного змісту), О. О. Дмитрієнко (прикладна задача з математичного аналізу), Т. М. Задорожня (прикладні задачі професійного фінансово-економічного спрямування) для студентів;

− Л. С. Межейнікова (математична задача фінансового змісту) основної школи.

З огляду на основні підходи до визначення поняття «прикладна задача» ми дотримуємося такого формулювання: *прикладною задачею в курсі алгебри основної школи* називатимемо задачу, що виникає в реальній ситуації (побутова, наукова чи професійна діяльність), для розв'язання якої потрібно застосувати понятійний апарат курсу алгебри.

Аналіз досліджень, пов'язаних з вивчення поняття «прикладна задача» засвідчує, що процес розв'язування прикладної задачі ґрунтується на застосуванні методу математичного моделювання, який дозволяє полегшити проєктування, дослідження, прогнозування поведінки явища або процесу.

У дидактиці математики розроблено різні підходи до формулювання вимог до прикладних задач системи. Розглянемо окремі з них. За твердженням А. Улухходжаєва, важливо враховувати такі вимоги до прикладних задач: цінність для конкретних наук і техніки; математична змістовність і доступність; допомога в осмисленні математичної теорії; сприяння розширенню й поглибленню діалектико-матеріалістичного світогляду; віддзеркалення обмеженої єдності абстрактних і конкретних математичних понять. Також автор виокремлює такі джерела подання прикладних задач у системі вивчення курсу математичного аналізу: збирання матеріалів з практики роботи місцевого промислового й сільськогосподарського виробництва для складання математичних задач; підбір задач з інших навчальних предметів (фізика, хімія, біологія), що розв'язуються методами математичного аналізу; доцільність прикладної зорієнтованості частини задач і вправ у підручниках, сформульованих формально-математичною мовою, надання їм практичного змісту [174]. Сформульовані вченим вимоги стосуються навчання студентів математичного аналізу.

У результаті дослідження навчання студентів економічної спеціальності вищої математики Г. Я. Дутка [55] сформулювала такі вимоги до прикладних задач: сюжетна (сформульована природною мовою, у якій явища й події описано кількісно та якісно); прикладна задача є словесною моделлю реальної ситуації, що виникає на практиці; розв'язується засобами математики. Також авторка виокремлює техніко-технологічні, економічні, гуманітарні задачі, однак домінантними в дослідженні є економічні задачі (фінанси, побут, торгівля), які мають специфічну структуру, а саме складаються з умови і вимоги і предметного сюжету.

У праці Т. А. Полякової [137] представлено принципи, яких потрібно дотримуватися під час відбору прикладних задач з теорії ймовірностей і математичної статистики, з-поміж яких: *доступності* (прикладні задачі перебувають у сфері можливостей і вікових особливостей учня); *науковості*; *системності і взаємозв'язку* (прикладна задача має бути частиною системи прикладних задач); *інтеграції шкільних дисциплін*; *практичної значущості; активності* (учні займають активну позицію в процесі виконання практичних робіт); *суб'єктивізму* (самостійна робота під час складання прикладних задач, підбору прикладів); *мотивації; профільної спрямованості*.

Зазначимо, що методичні вимоги до прикладних задач було сформульовано також у Л. О. Соколенко, Л. Г. Філон, В. О. Швеця в посібнику «Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу» [160]. Вони стосуються вивчення шкільного курсу алгебри і початків аналізу. У нашому дослідженні їх враховано під час вироблення вимог до прикладних задач курсу алгебри основної школи: 1) задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності й значущості здобутих математичних знань; 2) задачі повинні відповідати шкільним програмам і чинним підручникам з курсу алгебри і початків аналізу щодо методів і фактів, будуть використовують у процесі їх розв'язування; 3) природничі прикладні задачі природничого характеру повинні демонструвати практичне застосування математичних ідей у різних галузях природознавства, зокрема біології, генетиці, екології, хімії, медицині, фармації; 4) зміст задач повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес, давати можливість демонструвати ефективне використання математичних знань на практиці; 5) поняття і терміни в прикладних задачах мають бути інтуїтивно зрозумілими учням; 6) числові дані в прикладних задачах повинні відповідати практиці, тобто бути реальними.

Підґрунтям для створеної нами системи прикладних задач є математичні моделі, потрібні для їх розв’язування, що дає змогу по-перше, закріпити задачу за конкретною темою; по-друге, установити рівень складності такої задачі; по-третє, з’ясувати, у якій сфері життя можна застосувати знання, здобуті під час розв’язування задачі.

У процесі дослідження сформулювали такі **вимоги до прикладних задач** системи:

Рис. 1.4. Прикладні задачі системи

1. *Змістова валідність* прикладної задачі полягає у відповідності математичного апарату задачі змісту навчального матеріалу, який пропоновано для вивчення в курсі алгебри. Зміст задачі повинен відповідати чинним програмам з математики, щоб учитель міг використовувати її на конкретному уроці під час вивчення відповідної теми, тобто він повинен реалізовувати глибоке розкриття програмного матеріалу. Окрім того, задача має описувати ситуацію за допомогою реальних, наявних у практиці числових величин, припущення і висновки задачного розв’язання повинні

бути взаємно відповідними з реальним процесом, описаним у задачі. Змістова валідність прикладної задачі забезпечує можливість її використання в системі вправ на тренування, закріплення й контролю вмінь учнів, тобто на будь-якому етапі вивчення курсу математики в школі.

Продемонструємо виконання цієї вимоги на прикладі задачі.

Задача №1. Під час виготовлення томатного соку здійснюється залиття водою томатного пюре. Каструля об’ємом 20 л заповнена томатним пюре, і неї висипали певну кількість томатного пюре в таку саму каструлю і долили води, що зробило її повною. Отриманою сумішшю доповнили першу каструлю. З першої каструлі вилили $6\frac{2}{3}$ л суміші у другу каструлю, і кількість суміші в обох каструлях стала рівною. Скільки літрів пюре вилили в другу каструлю на початку?

Змістову валідність забезпечено тим, що задачу використовують під час вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності»; її передбачено вивченням теми «Квадратне рівняння як математична модель задачі», шляхом уведення змінної *x*, яка позначає початкове переливання, учні записують квадратне рівняння – модель задачі для розв’язання.

2. *Диференційовна реалізованість* прикладної задачі забезпечує кожному учневі умови для максимального розвитку його здібностей.

Диференційовну реалізованість ураховують під час рівневої та профільної диференціації. Профільна диференціація в навчанні є виявом зовнішньої диференціації, за якої передбачено поділ класів залежно від нахилів та здібностей учнів на класи різних профілів. Профільне навчання характерне для старшої школи, тому до створення таких класів в основній школі потрібно здійснювати допрофільну підготовку. Основними завданнями допрофільної підготовки є забезпечення умов для розвитку здібностей і нахилів, створення умов для самовизначення, і в результаті сприяння випускникові у визначенні подальшого профілю підготовки.

Рівнева диференціація стосовно прикладних задач є важливим компонентом якісного освітнього процесу, який забезпечує дидактичний принцип руху знання від простого до складного (поступове нарощування складності).

Для виявлення й розвитку здібностей учнів, реалізації їхніх потенційних можливостей, забезпечення всебічного розвитку особистості, підвищення рівня знань, удосконалення освітнього процесу кожну задачу потрібно закріпити за певним рівнем складності, тобто *диференційовно реалізувати*.

У психолого-педагогічних джерелах складність задачі досліджено з багатьох позицій і пов'язано з можливістю її розділення на більш прості підзадачі, а трудність передбачає актуалізацію наявного досвіду, створення й здійснення нового методу, способу, що дає змогу розв'язати задачу [130].

Складність задачі є об'єктивною властивістю задачі, трудність – це властивість задачі, яка віддзеркалює зв'язок людини, що розв'язує задачу із самою задачею.

Окрім того, складність задачі визначають: кількістю умов задачі; кількістю суттєвих взаємозв'язків усередині умови задачі; кількістю опосередкувань, потрібних для знаходження шуканого результату; кількістю перетворень, що сприяють розв'язанню. Трудність задачі характеризується ступенем новизни й узагальненості невідомого, що засвоюється; інтелектуальними можливостями учня [98].

Як бачимо, поняття складності й трудності задачі потрібно розрізняти. Складність задачі є об'єктивною характеристикою, що залежить від структури задачі загалом. Трудність задачі виражається через сукупність суб'єктивних факторів, що віддзеркалюють особливості діяльності учня, який розв'язує задачу.

Рівень складності можна забезпечити з урахуванням таких аспектів:

Таблиця 8

Рівні складності прикладних задач

Рівень складності задачі	**Характеристика**	
I рівень	Математична модель задана.	Математична модель задачі не задана, учневі потрібно її створити за вхідними даними.
II рівень	Математична модель задачі задана. Математична модель є складною або процес її дослідження вимагає застосування всіх розумових операцій.	Математичну модель до задачі потрібно створити. До конкретної ситуації є декілька видів моделей.

3. Сюжетна валідність. Опис ситуації, яку розглядають (міжпредметні, професійні, побутові).

Сюжет (фабула задачі) – це змістова оболонка задачі, у якій віддзеркалено реальний об'єкт, його властивості, продемонстровано зв'язки математики з іншими науками та сферами діяльності, окреслено проблеми й властивості об'єкта, для вивчення яких потрібно застосувати математику. Фабула задачі має бути доступною для розуміння учня, тобто містити термінологію хоча б на інтуїтивному рівні доступну для усвідомлення. Корисно, також використовувати в задачах невідомі терміни з поясненням у примітках. Це сприяє розширенню світогляду учня. Окрім того, фабула задачі також має відповідати віковим особливостям і розумовому розвитку учня, його інтересам, бути сучасною.

Відповідно до заявленої фабули та залежно від процесу описаного в ній (побутового змісту, професійного змісту, міжпредметного змісту) виокремлюємо *три типи прикладних задач*.

Прикладними задачами побутового змісту найчастіше є задачі, що віддзеркалюють процеси та дії повсякденного життя, причому такі задачі містять повідомлення про предмети побуту. Їх розв'язування забезпечує учням формування досвіду практичної діяльності під час розв'язання актуальних питань й отримання особистісно-значущих для нього результатів.

Упровадження таких задач в освітній процес сприяє розвитку пізнавального інтересу, формуванню конструктивних підходів до розв'язання поставлених завдань і реалізує виховні завдання. Прикладом є задача №1, яку розглянуто вище.

Прикладна задача професійного змісту – це така задача, під час розв'язання якої передбачено вивчення, дослідження технології професійної діяльності з різних сфер виробництва й обслуговування. Фабулою такої задачі є моделювання певної професійної діяльності; опис умов і самого технологічного процесу; виокремлення вимог до вмінь, потрібних для виконання професійних повноважень. Такі задачі формують політехнічний кругозір учня, створюють умови для його професійної зорієнтованості.

У задачах професійного змісту передбачено розгляд таких аспектів подальшого застосування математики, як використання відповідних знань і вмінь для зорієнтованості в життєдіяльності, без активного застосування математики в майбутній професії, як засіб виконання професійних обов'язків чи як основний апарат професійної діяльності.

Такі задачі можна розділити за типами: природа–людина; людина–техніка; людина–людина; людина–знакова система; людина–мистецтво.

Наприклад, задача №2 (професійний зміст). На сайті готелю відбувається оцінювання його сервісу. Відомо, що 30% опитаних поставили оцінку 5 та 40% – оцінку 4, 1000 осіб – оцінку 3, а всі інші – 2. З'ясувати, скільки користувачів оцінили сервіс готелю на сайті, якщо середня оцінка складає 3,95 балів.

Прикладною задачею міжпредметного змісту є така задача, під час розв'язання якої передбачено виявлення й дослідження фізичної, біологічної, хімічної та іншої суті об'єкта й відповідного процесу, їх взаємозв'язку й взаємодії. Фабулою такої задачі слугує фізичне, біологічне, хімічне, екологічне або інше явище, закон, що є основою дії певного механізму, пристрою, організму. Їх застосування в освітньому процесі допоможе учневі глибше усвідомлювати зміст навчального матеріалу; розширювати кругозір; розвивати логічне мислення, формулювати доказові міркування тощо.

Окреслимо вміння, потрібні учням для розв'язування задач міжпредметного змісту:

− Визначення, до якого предмету або навчальної галузі належить задача;

− актуалізація й виокремлення знань з відповідного предмету;

− перенесення (суміщення, проєктування) знань з відповідного предмету на конкретну ситуацію;

− виконання потрібних розрахунків;

− отримання результату, установлення його достовірності, порівняння з умовою завдання, формулювання висновків [38, с. 58].

Наведемо приклад задачі міжпредметного змісту.

Задача №3. М'яч кинули з балкону другого поверху ($h_0 = 4\ м$), і він піднявся на висоту четвертого поверху ($h = 12\ м$). З якою швидкістю кинули м'яч та через який час він упав на землю.

Під час запису розв'язуючої моделі потрібно актуалізувати знання з курсу фізики, тому ця задача належить до ІІ рівня складності, якщо ж додатково навести формулу закону вільного падіння, то задача може відповідати І рівню складності.

4. *Відповідність дидактичним цілям.* Кожна задача, яку застосовує вчитель, повинна мати своє дидактичне призначення. Розглянемо детальніше різні способи застосування прикладних задач на сучасному уроці.

4.1. *Під час формування нового поняття* використання прикладних задач сприяє підсиленню мотивації до вивчення теми, повторенню раніше вивченого матеріалу, який є опорою для вивчення нових математичних фактів. Такі задачі повинні бути яскраво вираженими, доступними учням, містити ознаки нового, ще не вивченого.

4.2. *Формування вмінь і навичок* є важливим на перших заняттях з теми, на яких потрібно розглядати задачі на оволодіння новими прийомами, методами, алгоритмами розв'язання засвоюваного циклу задач. Під час розв'язування перших задач потрібно чітко формулювати кожен етап і записувати розгорнуте пояснення. Формування навичок здійснюється на основі систематичного повторення й використання знань і вмінь завдяки багаторазовому використанню операцій, дій, прийомів, алгоритмів у різних типових і нетипових задачних ситуаціях.

4.3. Закріплення сформованих знань і вмінь. Це задачі на засвоєння понять, їх визначень, на формування вмінь, закріплення методів розв'язання. Прикладні задачі демонструють засвоєні поняття на практиці.

4.4. Повторення раніше вивченого матеріалу потрібне для цілісного сприйняття курсу математики, оскільки всі теми й розділи є взаємопов'язаними. Під час розв'язання задачі використовують не лише щойно здобуті, нові знання, а й раніше вивчені факти та поняття. Задачі з такою дидактичною ціллю застосовують на підсумкових заняттях з теми. Прикладні задачі вимагають від учнів застосування вивченого матеріалу з попередніх тем.

4.5. Контроль засвоєння сформованих математичних знань передбачає перевірку й оцінювання результатів навчання на основі самостійного розв'язання набору диференційованих задач з конкретної теми. Контроль можна здійснювати під керівництвом учителя або у формі самоконтролю.

5. Узгодженість з видом математичної моделі передбачає три типи задач та їх відповідні характеристики.

Учні простіше розв'язують задачі, у яких задано математичну модель або її легко побудувати на основі заданих відношень. Складнощі виникають під час розв'язування задач, у яких потрібно математизувати об'єкти задачі та обрати математичний апарат за яким цю задачу потрібно розв'язати.

Для виокремлення різних видів прикладних задач залежно від того, як задано математичну модель, доцільно користуватися пропозицією М. В Єгупової [57]. Учена пропонує розмежовувати чотири рівні складності практичних задач. Ми наведемо спрощений варіант типізації, який, на нашу думку, є доцільним у курсі алгебри основної школи.

Тип А − задача з прямою вказівкою на математичну модель. У задачах такого типу учням задано математичну модель в умові задачі. Математичною моделлю може бути текст, вираз, функція, графік, таблиця, рисунок, схема тощо.

Наприклад: «Розрахуйте час зеленого сигналу для пішохідного світлофора, установленого на проїжджій частині шириною 15 м, якщо пішохід переходить дорогу із середньою швидкістю 5 км/год. (Примітка: врахуйте, що тривалість «зеленого» сигналу вираховується за спеціальною формулою: $T = \frac{L}{3} + 5$, де Т – мінімальний час пішохідної фази (у секундах), L – ширина проїжджої частини по довгій стороні переходу (у метрах); під час проєктування світлофорних об’єктів на автомобільних дорогах про всяк випадок обов’язково додають 5 с для маломобільних, неквапливих і тих, хто запізнився)».

Тип В − задача у якій немає прямої вказівки на математичну модель, проте об’єкти й відношення співвідносяться з відповідними математичними об’єктами й відношеннями. В умові задачі чітко дано вказівку щодо того, як створити математичну модель. Задачі такого типу передбачають самостійне створення учнем математичної моделі або використання вже відомої, що відповідає вказаним в умові задачі вимогам.

Наприклад, фабула задачі може бути такою: «На проїжджій частині встановлено світлофор, який перемикається після натискання спеціальної «пішохідної» кнопки (рис. 1. 5) і дозволяє перехід протягом певного часу після цього. Яка довжина черги

Рис. 1. 5. Пішохідна кнопка

автомобілів, що чекають проїзду, утвориться після вмикання зеленого сигналу для пішохода, якщо ширина дороги 16 м, швидкість автомобілів 45 км/год, пішоходи переходять вулицю зі швидкістю 5 км/год».

Тип С − об’єкти й відношення задачі співвідносяться з відповідними математичними об’єктами й відношеннями, але неоднозначно. Потрібно враховувати реальні умови. Математичну модель у таких задачах не задано. Учень має самостійно створити до неї відповідну математичну модель. На етапі створення математичної моделі в учнів можуть виникати складнощі, оскільки до задачі такого типу можна побудувати дві і більше математичні моделі, тому учень має обрати найбільш раціональну з них.

Наприклад: «На пішохідних переходах, що знаходяться на відстані 500 м одночасно два пішоходи натиснули «пішохідні» кнопки. Перший пішохід помітив, що зелений сигнал увімкнувся через 30 с і тривав 20 с. За цей час утворилася черга автомобілів довжиною 80 м. Водій останнього автомобіля із черги встиг проїхати другий світлофор і помітив, що в цей момент спідометр показував 50 км/год. Скільки часу чекав зеленого сигналу другий пішохід».

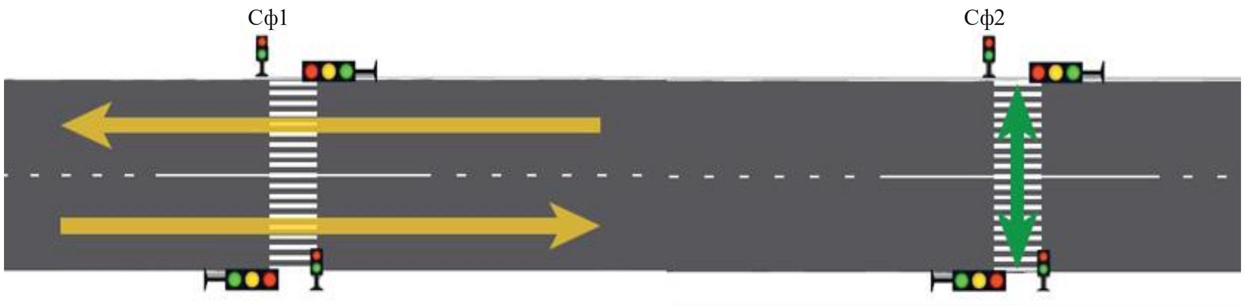


Рис. 1. 6. Модель руху транспорту

6. Залежно від повноти даних прикладні задачі можуть бути *закриті* й *відкриті*.

Закрита задача – це така, у якій умова чітка й однозначна, розв’язання здійснюється конкретним методом, розв’язок чітко визначений або єдиний. Такі задачі використовують для закріплення, відпрацювання прийомів розв’язання.

Відкрита задача – це задача, яка не містить даних у своїй умові або містить надлишкові, зайві дані, їх потрібно встановити внаслідок дослідження, вимірювання, спостереження. У відкритих задачах умова або відповідь завчасно невідомі, що стимулює учнів до реалізації їхнього творчого потенціалу. Відкриті задачі мають декілька варіантів розв’язків, передбачають унікальні розв’язання й відповіді, що дозволяє учням самостійно відкривати невідомі їм факти йураховувати їхні можливості. Мета розв’язування таких задач – залучення учнів до творчої, дослідницької пізнавальної діяльності, яка забезпечить розвиток логічного мислення й дослідницьких умінь.

Відкриті задачі мають багато варіантів розв’язання, однак розв’язання називається правильним, якщо воно відповідає умові задачі. Умову такої задачі потрібно бути сформулювати зрозуміло й цікаво для учня, щоб це спонукало його до дослідницької діяльності. Цікавість умови забезпечить появу намірів і прагнень до розв’язування задачі. Також потрібно передбачити суперечність між умовою й завданням, подолання якої дасть результат. Відповіді на такі задачі можуть бути унікальними залежно від розв’язку кожного учня. Відкриті задачі сприяють розширенню математичних знань, конструюванню учнями своїх знань про реальні об’єкти.

Відповідно до сформульованих критеріїв у процесі дослідження було створено й апробовано добірку прикладних задач, які є засобом реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри, тобто засобом формування в учнів умінь математичного моделювання під час вивчення курсу алгебри. Запропонована система задач забезпечує виконання таких завдань: формує загальнонаукові методи пізнання, обчислювальні навички та логічне мислення учнів; установлює міжпредметні зв’язки; узагальнює та систематизує матеріал; сприяє залученню учнів до дослідницької діяльності.

1.4. Психолого-педагогічні засади формування в підлітків умінь математичного моделювання під час розв’язування задач

Учні основної школи (7 – 9 класи) перебувають у межах пубертатного періоду, тому для вивчення особливосте формування в них умінь математичного моделювання важливо дослідити психолого-педагогічні аспекти підліткового періоду, за якого відбувається перехід від молодшого шкільного віку до початку ранньої юності. Учні підліткового віку є майбутніми активними учасниками соціальних процесів. Ефективність формування вмінь у їхньому віці залежить від розуміння психологічних процесів, властивих особистості підлітка.

Підлітковий вік – це середній шкільний вік, у якому виявляються, з одного боку, процеси соціалізації, а з іншого – індивідуалізації, що вказує на його суперечливість. Основними суперечностями в цьому віці є перехід від дитинства до дорослості (поєднуються особливості двох вікових періодів, що демонструє маргінальність особистості); нерівномірність розвитку фізіологічної, інтелектуальної та соціальної зрілості; вік соціалізації та індивідуалізації особистості. Ці суперечності спричиняють низку проблемних моментів, а саме, виникає питання,чи є він стабільним, або кризовим, окрім того, у психології відомі різні погляди й підходи до його вікових меж [66, с. 212].

Як бачимо, сучасна психологія не має чіткого єдиного погляду на межі підліткового віку. За твердженням К. М. Поліванової [136] вікові орієнтири в сучасному суспільстві розмиваються, їх пов’язано з хронологічними подіями, віхами та лініями життя людини. На думку Л. В. Виготського, це можна пояснити зміною системи потягів і прагнень підлітків, які залежать не лише від розвитку людини, а й від суспільства, яке впливає на неї.

Проблеми зміни вікових періодів пов’язано з питаннями соціальної ситуації розвитку, провідної діяльності й психічних новоутворень вікових періодів. Недостатність спільної діяльності як організованої активності індивідів, які взаємодіють на відтворення об’єктів культури є однією з причин подовження підліткового віку й перенесення професійного самовизначення з 14 – 15 років до закінчення школи.

У процесі створення вікової періодизації Д. Б. Ельконін орієнтувався на поняття провідна діяльність, розроблене О. М. Леонтьєвим, тобто, вчений підкреслював, що для кожної вікової групи є система різних видів діяльності, з-поміж яких основне місце посідає провідна діяльність. Провідною є діяльність, яка є основною за значенням для психічного розвитку. У працях Д. Б. Ельконіна наголошено на тому, що підлітковий вік має вікові межі 11 – 15 років, а провідною діяльністю цього періоду є інтимно-особистісне спілкування з однолітками, у процесі якого здійснюється засвоєння норм та правил поведінки в колективі (11 років); реалізується прагнення знайти своє місце в ньому (12 – 13 років); усвідомлення власної цінності (14 – 15 років), що сприяє формуванню самосвідомості – основного новоутворення психіки [202, с. 42].

Таблиця 9

Різні підходи до встановлення меж підліткового віку

Учений	**Межі підліткового віку**
Ф. Райс [143]	11 – 19 років
Е. Еріксон [203], Г. Крайг [80], А. А. Реан [142]	12 – 19 років
М. Кле [70]	11 – 18 (20) років
Л. С. Виготський [36]	14 – 17 років йому передує криза 13 років
Е. Шпрангер	Дівчата (13 – 19 років), хлопці (14 – 22 роки)
Д. Б. Ельконін [201]	Молодший підлітковий (12 – 14 років), старший підлітковий (15 – 17 років)
Б. Ньюмен, П. Ньюмен	13 – 18 років
О. А. Карабанова	Молодший підлітковий (11 (12) – 15 років), старший підлітковий (15 – 17 років)

На думку Д. І. Фельдштейна, основною у психічному розвиту підлітка є суспільно корисна, соціально важлива, безоплатна діяльність. У своїй праці [176] автор виокремив три рівні розвитку підлітків.

Таблиця 10

Рівні розвитку підлітків

I рівень	II рівень	III рівень
10 – 11 років	12 – 13 років	14 – 15 років
Період коли діти «приймають» себе, але водночас усвідомлюють велику кількість власних негативних рис. Вони спрямовані на дії, які виконують дорослі; дії, які є корисними.	Період, пов'язаний з негативною самооцінкою дітей, ситуативний, який поєднується з позитивним ставленням однолітків. Особи цього віку прагнуть визнання своїх прав, залучення їх до суспільства на умовах виконання важливої ролі.	Період коли діти критично ставляться до себе. У цьому віці переважає негативна самооцінка, з'являється інтерес до власного майбутнього, вони прагнуть проявити свої можливості, посісти відповідне місце в суспільстві, що відповідає їхньому бажанню в самовизначенні.

У працях Л. С. Виготського для пубертатного періоду виокремлено такі фази, пов'язані зі змінами інтересів: *негативна* (згортання попередньої системи інтересів, що спричиняє вияви негативної поведінки: погіршення навчання, дратівливість, незадоволеність собою, занепокоєння); *позитивна* (зародження нових інтересів, зацікавленість психологічними переживаннями інших людей і своїми власними).

За твердженням О. І. Бедлінського [16] конструювання є провідною діяльністю підліткового віку. У структурі процесу творчого конструювання можна виокремити такі цикли: розуміння вимог в умові задачі; побудова задуму розв'язання (проєктування); досягнення підтвердження чи спростування правильності задуму. Творче конструювання підлітків можна реалізовувати такими способами: у процесі побудови об'єктів матеріального світу; конструювання соціальних відносин; конструювання-пізнання (конструювання природних об'єктів і явищ спрямоване на пізнання навколишньої дійсності).

З-поміж описаних підходів для нашого дослідження важливим є підхід Д. Б. Ельконіна, який поділяв підлітковий вік на два етапи: *молодший* (12 – 14 років) та *старший* (15 – 17 років), тому виникає потреба більш детально розкрити зміст пізнавальних психічних особливостей, властивих для цих вікових груп.

Зазначимо, що основними завданнями розвитку дітей підліткового віку є володіння базовими шкільними знаннями й уміннями; формування вміння навчатись у школі; розвиток навчальної мотивації та інтересу; вироблення навичок спільної діяльності з однолітками та правильної оцінки своїх результатів порівняно з іншими; формування вмінь досягати успіху й правильно ставитися до невдач; вироблення уявлення про себе як людину з великими можливостями для розвитку.

Молодший підлітковий вік

Пізнавальні мотиви: оволодіння новими знаннями; пізнавальний інтерес; вивчення способів самостійного засвоєння знань; вивчення власних можливостей; задоволення від діяльності; загальне заохочення активності.

Соціальні мотиви: прагнення знайти своє місце з-поміж навколишніх; навчання задля винагороди; навчання для схвалення; навчання для уникнення покарання; навчання, щоб почуватися комфортно; навчання, щоб бути компетентним.

Особливості: прагнення до нового; прагнення досягати успішного результату й оминати невдачі, щоб підвищити самоповагу та самооцінку; потреба в компетентності, щоб уникати страху перед новим матеріалом.

Молодші підлітки вже не підпорядковуються авторитету, проте легко піддаються зовнішньому впливу. Вони емоційні, не визнають впливу віку й неадекватно оцінюють свої власні можливості. Навчальна діяльність перестає впливати на розвиток, що було характерно для попереднього періоду. У спілкуванні з друзями здійснюється вихід за межі свого досвіду, сформованих навичок, якостей, однак водночас вони шукають підтримки й розуміння навіть, якщо отримують погані оцінки, роздратовані, не схожі на інших.

Навчальна діяльність відходить на другий план, відстороняється домінантною комунікативною, а отримана оцінка дає змогу посісти важливе місце в класі. Без такого впливу її важливість стає не суттєвою. Думка про вчителя в такому віці формується з урахуванням думки класу.

У молодшого підлітка виникає конфлікт між бажанням знайти місце в суспільстві, якого він ще не визначив, і його можливостями. Спостерігається відчуття дорослості, відраза до заборон і чутливість до помилок учителів. Водночас самооцінка підлітка чутлива, він не готовий до особистих навчальних невдач, тому основним у навчанні молодшого підлітка є успіх, успішність підлітка в конкретній діяльності, формує цікавість до її виконання.

Специфічними рисами молодшого підлітка є підвищена емоційність, чутливість до чужої думки, вразливість, прагнення знайти своє місце з-поміж однолітків (бути схожим на інших, проте мати щось особливе), бажання відділитися від усього дитячого, відчуття дорослості [153].

Основне новоутворення – здатність до самоаналізу. У системі цінностей спостерігається внутрішній конфлікт, а самооцінка зростає, що віддзеркалено у впевненості в собі.

У процесі навчання молодший підліток отримує здатність до складного аналітико-синтетичного **сприйняття** предметів, сприймає їх залежно від свого емоційного ставлення до них. Відсутність інтересу спричиняє поверхове, випадкове сприйняття навколишньої дійсності.

Пам'ять і **увага** розвиваються. Зростає вміння контролювати й організовувати свою увагу, пам'ять набуває свого якісного підйому.

Мислення молодшого підлітка характеризується більш розвиненою схильністю до абстрагування й узагальнення. Молодший підліток здатен абстрагуватися від конкретного матеріалу й викладати роздуми словесно, він намагається будувати гіпотези, доводити або спростовувати їх, що засвідчує розвиток логічного мислення. У цей період продовжує формуватися *логічне* (використовує логічні конструкції під час формулювання понять) і *теоретичне* (установлення зв'язків між поняттями і їх вираження в судженнях) мислення. *Творче мислення* розвивається в процесі формування самостійної активності, зростання вольових можливостей особистості й самоконтролю. Інтелектуальні процеси стають більш гнучкими, розвиток засобів пізнання значно передує особистісному розвитку.

Уява є фактором розвитку творчості особистості молодшого підлітка. Вона виявляється на заняттях, що допомагають йому виявити себе, усунути внутрішній конфлікт.

Мовлення виконує функції засобу спілкування з іншими, засобу пізнання, знаряддя утворення й вираження емоцій, механізму вольової регуляції, засобу здобуття нових знань.

З огляду на вищесказане можна дійти висновку, що в системі задач для учнів молодшого підліткового віку під час вивчення математики, а в цьому разі алгебри в 7 – 8 класах слід передбачати задачі, які:

– ураховують життєвий досвід та інтереси учня, рівень інтелектуального розвитку;

– розвивають комунікативні здібності (спілкування з однолітками і дорослими);

– пояснюють виникнення понять, демонструють їх застосування на практиці;

– формують уявлення, що ґрунтуються на порівнянні, установлюють на основі цього зв’язки між поняттями.

Доцільно використовувати форми навчання, що стимулюють пізнавальний інтерес до навчання. Це можуть бути, наприклад, навчальні ігрові ситуації, інтерактивні вправи, тематичні газети або плакати.

Для цієї вікової групи важливо сформувати уявлення про математичні моделі, їх види та вміння їх будувати. Зокрема, це може бути інтерактивна вправа з наведеними ситуаціями (словесно або графічно), до яких потрібно підібрати відповідні математичні моделі.

Старший підлітковий вік

Пізнавальні мотиви, які властиві старшим підліткам: творчий пізнавальний інтерес; зорієнтованість на оволодіння способами самостійного засвоєння знань; інтерес до процесу самостійного здобуття знань; прагнення до самоосвіти, вивчення власних можливостей; навчання для задоволення цікавості, загальне заохочення активності.

Соціальні мотиви: отримати схвалення від навколишніх; навчатися, щоб поважати себе; потреба в співробітництві для отримання задоволення від цього процесу; бажання підготуватися до майбутньої професійної діяльності; почуття відповідальності, бажання виконати свій обов'язок.

Старший підлітковий вік особливий соціальною ситуацією розвитку: перед підлітком постає завдання професійного самовизначення, тому провідною діяльністю на цьому етапі є навчальна, професійно спрямована. Основною метою самовизначення є формування готовності до свідомої побудови, корекції перспектив свого професійного, життєвого й особистісного розвитку, що вимагає значного самоаналізу та раціонального співвіднесення власних інтересів, можливостей і здатностей з потрібними для обраної професії.

Старший підлітковий вік характеризується остаточним переходом до дорослості. Підлітковий досвід є недостатнім, а дорослий ще не набуто.

Особливості віку. Підвищена потреба в емоційних контактах, інтенсивна соціалізація, що співіснує одночасно з бажанням індивідуалізації. Активний пошук друзів, швидка зміна симпатій. Конфлікти, примирення, полярне мислення. Світосприйняття підлітка ґрунтується на вірі в те, що він не зробить помилок, на відміну від дорослих, оскільки мудріший від навколишніх. Старший підлітковий вік особливо важливий для формування моральних переконань, цінностей і ставлення до світу.

Основне новоутворення самосвідомості – це почуття дорослості, бажання відчувати себе рівним з дорослими. Воно визначає напрям розвитку й зміст активності, емоційних реакцій [154].

Складність взаємовідносин підлітка й дорослого полягає в бажанні самостійності, проте водночас у результаті виникнення труднощів, тривоги він чекає від дорослих допомоги й підтримки.

Основне новоутворення – потреба в самовизначенні Я-концепції, система цінностей, цілей у житті. Самооцінка не змінюється, спостерігається низький рівень внутрішнього конфлікту цінностей.

Сприйняття і **пам'ять –** процеси, які залежать від освітнього процесу. У процесі сприймання матеріалу підліток цілісно віддзеркалює предмет або явище, що виникає під час безпосередньої дії подразника на рецепторну поверхню. Цілеспрямоване сприйняття все ж вибіркове, а його діяльність є аналітико-синтетичною.

Унаслідок ускладнення навчального матеріалу вдосконалюється робота **пам'яті**. Розвивається логічна пам'ять, її домінування сповільнює розвиток механічної пам'яті, також залучається довільна й опосередкована пам'ять. Довільна пам'ять переважає в навчанні, однак матеріал, який викликає емоційне ставлення, фіксується мимовільно. Пам'ять збільшується в об'ємі, ґрунтується на логічних операціях, запам'ятовування і відтворення стають більш усвідомленими. Зростає інтерес підлітка до покращення запам'ятовування.

Уява сприяє виявам творчості підлітка, він конструює, малює, від процесу фантазування він отримує задоволення. У своїх фантазіях підліток краще розуміє свої бажання, емоції, уявляє своє майбутнє. Зближення теоретичного мислення й уяви дає поштовх для творчої активності підлітка.

Мовлення розвивається, учень формує усні виступи, намагається вести роздуми, висловлювати думки.

Мислення в старшому підлітковому віці продовжує розвиватися зокрема формується теоретичне і логічне мислення. У старшого підлітка виявляється здатність оперувати гіпотезами під час розв'язування задач та аналізувати абстрактні ідеї, шукати помилки. Розвиток інтелекту дає змогу учням думати про майбутнє, формувати більш свідомий погляд на світ, унаслідок чого відбувається становлення світогляду [142]. *Теоретичне мислення* ґрунтується на оперуванні поняттями, переході від одного судження до іншого. Підлітки формулюють гіпотези, класифікують і порівнюють поняття, відшукують аналогії, узагальнюють.

Також наявні такі зміни в мисленні: перехід від наочного й предметного мислення до формального та абстрактного; оволодіння розгорнутими розмірковуваннями; оволодіння здатністю систематично будувати гіпотези, робити висновки, перевіряти їх істинність; реалізовувати власно створені задуми, виконуючи роль автора проєктивної діяльності; здійснювати самоаналіз своїх розумових операцій [152].

Важливим новоутворенням у пізнавальній сфері старшого підлітка є становлення формально-логічного інтелекту, гіпотетико-дедуктивного мислення, дивергентного мислення, рефлексії. Навчальну діяльність спрямовано на саморозвиток і самоосвіту.

Окрім того, удосконалюється *творче мислення* завдяки символічному мисленню, яке стає більш зрілим. Воно ґрунтується на поєднанні теоретичної, символічної, емпіричної, аналітико-синтетичної й абстрактно-логічної форм мисленнєвої діяльності. Творчу діяльність виконують не лише під впливом спонтанних мотивів, а й на основі творчих цілей.

Суттєвою рисою, що характеризує **мислення** старшого підлітка, є його критичність, що виявляється в бажанні до самостійного вивчення фактів, самостійної їх оцінки. Ця риса зумовлює в подальшому вироблення власних думок, поглядів, переконань.

Викладені вище положення дозволяють стверджувати, що система задач для учнів старшого підліткового віку під час вивчення математики, зокрема алгебри у 8 – 9 класах, має містити задачі, які:

– дозволяють учням самостійно планувати навчальну діяльність;

– дають змогу застосувати інтуїцію, установити власне ставлення до ситуації, описаної у фабулі задачі;

– містять повідомлення (інформаційний ресурс), що формує здатність сприймати й розрізняти реальне та нереальне;

– дозволяють максимально застосувати свої інтелектуальні можливості;

– вимагають застосування нових знань у ситуаціях з життя, які демонструють практичне значення матеріалу.

Слід також звернути увагу, що провідною мисленнєвою дією під час виконання учнями молодшого та старшого підліткового віку математичного моделювання є **абстрагування**. У працях Е. Н. Кабанової-Меллер [66] представлено види абстрагування, властиві для процесу моделювання: *ізолююче* (виокремлюються лише суттєві для дослідження властивості об’єкта, а несуттєві відкидаються); *підкреслююче* (суттєві для дослідження властивості виокремлюються, а несуттєві стають фоном); *розчленоване* (суттєві властивості виокремлюються, а несуттєві є відокремленими і сприймаються як часткові випадки).

Для цього віку найбільш вдалими формами роботи є робота в групах (метод «навчаючи вчусь», метод проєктів), уроки-конкурси (урок-вікторина, урок-брейн-ринг та ін.), квести.

На цьому віковому періоді важливо формувати поняття про етапи математичного моделювання, уміння будувати математичні моделі до задач. Реалізувати ці завдання можна по-різному, наприклад, у процесі підготовки навчального проєкту на тему «Квадратична функція в архітектурі», де учні досліджують використання вивченого матеріалу на реальних об’єктах. Цей період навчання передбачає створення для учнів ситуацій, у яких вони можуть самостійно виявити себе. Доцільно використовувати форми роботи з написання науково-дослідницьких робіт, створення прикладних задач. Учні цієї вікової групи узагальнюють свої знання про математичні моделі і їх види та етапи математичного моделювання, використовують ІКТ для їх створення.

У науковій літературі розмежовують три стилі математичного мислення, характерні для учнів старшого підліткового віку: *візуальний* (розуміння математичних фактів та зв’язків за допомогою ілюстративних уявлень, учні з таким стилем мислення більше зосереджуються на реальних ситуаціях); *аналітичний* (осмислення математичних фактів через символічні чи словесні форми представлення, учні з таким стилем мислення зосереджуються на математизації фактів); *інтегрований* (учні здатні поєднувати візуальні й аналітичні стилі мислення на однаковому рівні) [207].

Отже, вплив на підлітка буде успішним, якщо вчитель враховуватиме всі зміни, які спостерігаються в цьому періоді. Підлітку потрібно відчувати, що він може поділитися з учителем своїми поглядами й бути впевненим, що дорослий його підтримає та зрозуміє. Учителеві важливо підтримувати індивідуальні підходи учнів у процесі моделювання; чітко знати межі втручання, тобто повинна бути продумана стратегія втручання в процес, коли учень самостійне виконує моделювання; знати способи підтримки стратегії, яку обрав учень. Представлені вище особливості підліткового віку покладено в основу нашого дослідження.

Висновки до розділу І

З-поміж ключових компетентностей у Законі України «Про освіту» виокремлено математичну компетентність, яку можна сформулювати в процесі застосування математичних методів для розв’язання прикладних завдань у різноманітних галузях діяльності, що передбачає потребу в розумінні й використанні математичних моделей та вмінь їх будувати, з огляду на це математичне моделювання є одним з дієвих методів реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри.

Аналіз науково-методичної літератури з обраної теми продемонстрував, що на сьогодні належно не вивчено питання методики формування в учнів уміння здійснювати математичне моделювання в процесі вивчення курсу алгебри основної школи, а саме немає системи задач, яка може забезпечувати формування зазначеного вміння. У дослідженні ми уточнили компоненти дидактичної схеми ПСНШКА. Основними компонентами схеми є такі: *цільовий* (ґрунтується на конкретних кроках, завданнях щодо реалізації прикладної спрямованості навчання алгебри); *змістовий* (забезпечується прикладним змістом навчального матеріалу); *методичний* (методи, форми, засоби навчання математики, що забезпечують реалізацію прикладної спрямованості). Основними методами реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри в нашому досліджені є метод математичного моделювання, метод проєктів, навчальна практика та практичні роботи.

Метод математичного моделювання в основній школі передбачає дотримання трьох етапів (формалізація, дослідження моделі, інтерпретація). Під час роботи на кожному з етапів учень використовує певні вміння. У процесі розв’язування прикладних задач школярі вчаться будувати моделі, досліджувати створені моделі та інтерпретувати отримані результати.

Здобуті під час навчання алгебри знання потребують практичної реалізації, що стає можливим з використанням методу проєктів, який передбачає самостійну дослідницьку діяльність школярів над раніше обраною темою; навчальної практики, де учні ознайомлюються не лише із сучасним виробництвом, технікою, з практичною реалізацією наукових досягнень у сучасній технології, але й практикуються в перенесенні сформованої мисленнєвої моделі об’єкта чи процесу в реальність.

Засобом реалізації ПСНШКА є система прикладних задач. Ми вивчили наявні системи задач, циклів, ланцюгів, створених до різних курсів математики: геометрії основної школи, алгебри і початків аналізу та стереометрії старшої школи. Аналіз науково-методичних джерел дав змогу створити власні вимоги до системи й до прикладних задач, що знаходяться в її складі. З-поміж вимог до системи задач запропоновано також вимоги до структури й до функціонування.

Вимоги до структури системи прикладних задач: ієрархічність (задачі взаємопов’язані змістовими зв’язками); раціональність (кількість задач у системі повинна бути оптимальною, не перенасиченою і не викликати в учня відчуття надлишковості); наростання складності (задачі системи повинні забезпечувати рух від простого до складного).

Вимоги до функціонування системи прикладних задач: повнота (задачі системи повинні повною мірою забезпечувати розкриття понять теми);

відповідність системи задач змісту освіти, цільова відповідність (задачі системи у своєму поєднанні забезпечують виконання конкретних освітніх цілей).

Узагальнення дослідницького матеріалу, дозволило нам сформулювати такі методичні вимоги до прикладних задач системи: змістова валідність; диференційовна реалізованість; сюжетна валідність; відповідність дидактичним цілям; узгодженість з видом математичної моделі; повнота умови. Відповідно до цих вимог ми створили систему задач.

У результаті проведеного теоретичного аналізу, вивчення роботи вчителів та особистого досвіду навчання учнів загальноосвітньої школи ми розробили засоби реалізації прикладної спрямованості навчання курсу алгебри основної школи, що сприятимуть формуванню вміння математичного моделювання: система прикладних задач, навчальні проєкти та практичні роботи.

Методику формування вмінь математичного моделювання під час навчання алгебри в основній школі викладено у другому розділі дисертації.

Основні результати першого розділу дисертації представлено у наукових публікаціях [116], [117], [119], [120], [123], [124], [127], [189], [196].

РОЗДІЛ 2.
МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ УМІНЬ І НАВИЧОК МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Модель формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання під час розв'язування навчальних завдань

Формування вміння будувати математичні моделі реальних процесів і явищ, ситуацій побутової та професійної діяльності з використанням понять курсу алгебри є одним з основних у сучасній системі освіти, яку зорієнтовано на вироблення вмінь для життя та діяльності. Уміння є основними пізнавальними засобами в освітньому процесі, їх часто називають знаннями в дії, оскільки їх можна успішно реалізувати в практичних ситуаціях.

Навчальне вміння – це спосіб організації діяльності, пов'язаний з процесом засвоєння, що виконує функцію каталізатора, проте не є механізмом засвоєння [91, с. 24 – 25]. З іншого боку, навчальні вміння є прийомами розумової діяльності, завдяки яким учні самостійно засвоюють знання.

У дослідженні ми працювали над методикою формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання під час розв'язування прикладних задач. Підхід до розв'язування математичних задач, який запропонував Ю. М. Колягін, визначає, що вміння розв'язувати задачі є складним комплексом, який містить математичні знання (відповідно вміння й навички), досвід і сукупність сформованих властивостей мислення – мисленнєвих умінь (див. рис. 2.1) [73, с. 125].

Для глибшого розуміння процесу роботи учня під час розв'язування прикладних задач розкриємо сутність поняття «уміння здійснювати математичне моделювання».

Рис. 2.1. Структура вміння розв’язувати задачі

Навчальні вміння, які формуються під час вивчення конкретного предмету, можна об’єднати в такі групи: *загальні* (формуються в процесі вивчення конкретного предмета, а також охоплюють знання з інших галузей, повсякденного життя, власного досвіду); *спеціальні* (уміння, важливі для вивчення окремого предмету, без свідомого володіння якими процес вивчення відповідного навчального матеріалу не є повноцінним, самі ж уміння невіддільно пов’язані зі знаннями) [96, с. 184].

Загальнонавчальні уміння – це універсальні для різних дисциплін способи отримання й застосування на практиці здобутих знань. *Загальнонавчальні уміння* поділяють на такі види: навчально-організаційні (найбільш складне вміння, оскільки складається із знань та більш простих умінь, з-поміж яких уміння усвідомлювати й визначати цілі завдання, планувати послідовність роботи, відбирати засоби розв’язання завдань, оцінювати діяльність і контролювати її); навчально-інформаційні (уміння працювати з різними джерелами інформації, фіксувати матеріал, використовувати пошукові системи, спостерігати); навчально-комунікативні (віддзеркалюють мовлення й навички писемності для інтерпретації власних спостережень і вираження думок); навчально-інтелектуальні (складаються з більш простих умінь з-поміж яких вміння виокремлювати основне, виявляти суттєві ознаки, порівнювати, узагальнювати, доводити, оцінювати).

Спеціальні уміння – це вид навчальної діяльності до складу якого входять уміння, відпрацьовані на практиці й обґрунтовані теоретично.

Деякі загальнонавчальні вміння на початковій стадії формування, а саме у межах вивчення предмету, виконують функцію спеціальних умінь, а спеціальні вміння на подальших стадіях застосовують у різних дисциплінах та інших галузях діяльності.

Після детального аналізу ми переконалися, що для нашого дослідження *вміння здійснювати математичне моделювання* є спеціальним умінням. Таке вміння передбачає знання про математичні факти та вміння досліджувати й вивчати математичні об'єкти, тому важливо його розділити на більш прості дії (таблиця 11).

Умовами успішного формування вміння здійснювати математичне моделювання вважаємо такі: чітке формулювання мети, яка буде усвідомлена учнем і відповідатиме мотивам діяльності; урахування вікових та психологічних особливостей учня; визначення операцій, що входять до складу дії, для підбору методики формування вміння; створення умов для засвоєння учнем знань про дію та умови його застосування на практиці; урахування межі функціонування вміння; залучення учня до активної діяльності, а не до простого отримання інформації.

Для оволодіння методом математичного моделювання потрібно розвивати наступні вміння: розв'язувати прикладні задачі, здійснювати математизацію об'єктів і процесів, логічно мислити, застосовувати інформаційні технології.

Таблиця 11

Структура уміння здійснювати математичне моделювання

<table>
<tr><th>Математичні знання</th><th>Етапи математичного моделювання</th><th>Розумові дії</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Поняття модель, математична модель, етапи математичного моделювання.
Види математичних моделей.
Про суттєві й несуттєві властивості об’єкта, математичну модель якого будують.
Про те, що одна математична модель може описувати різні процеси.
Один процес можна описати кількома математичними моделями.</td><td rowspan="2">І. Формалізація й побудова математичної моделі</td><td>Здійснювати розчленоване абстрагування (аналіз об’єкта, виокремлення суттєвих і несуттєвих властивостей).</td></tr>
<tr><td>Формалізувати суттєві властивості за допомогою моделей.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ІІ. Дослідження побудованої математичної моделі</td><td>Обґрунтовувати відповідність математичної моделі прикладній задачі.
Переходити від однієї математичної моделі до іншої. Будувати до математичної моделі задачі допоміжні моделі.</td></tr>
<tr><td>Розв’язувати математичну модель різними способами. Раціонально обирати спосіб розв’язання математичної моделі й організовувати розв’язання.</td></tr>
<tr><td>ІІІ. Інтерпретація розв’язків</td><td>Здійснювати інтерпретацію отриманих розв’язків мовою задачі.</td></tr>
</table>

Під час навчання в школярів потрібно формувати вміння здійснювати математичне моделювання так, щоб воно стало доведеною до автоматизму навичкою.

Після визначення структури ми запропонували модель формування вміння здійснювати математичне моделювання, яка містить цільовий, змістовий, діяльнісний, контролювальний компоненти. Цю модель представлено в вигляді таблиці 12.

Таблиця 12

Модель формування уміння здійснювати математичне моделювання

Цільовий компонент
Основні положення: потрібно ставити навчальну мету сформувати вміння; забезпечувати мотивацію щодо важливості формування вміння. Мета формування вміння: розвиток елементів навчальної діяльності, які забезпечують успішність навчання, самоосвіти та майбутньої професійної діяльності.

<table>
<tr><td colspan="3">Важливим аспектом формування вміння є мотивація, без навчально-пізнавальної мотивації формування вміння не відбуватиметься повною мірою. Мотивація надає учінню особистісний інтерес. Основними компонентами діяльності учня є потреби, мотиви, цілі, засоби (за відсутності хоча б одного з них навчальна діяльність не здійснюватиме потрібного впливу).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Змістовий компонент</td></tr>
<tr><td colspan="3">У межах цього компонента здійснюється сприйняття й запам’ятовування, застосування за зразком, а потім творче використання в новій ситуації. Уміння виокремлювати основне є пріоритетним у цьому компоненті, воно ґрунтується на аналізі, синтезі, абстрагуванні, ідеалізації, конкретизації й узагальненні. Уміння планувати й описувати, формулювати питання, складати схеми, оцінювати дії.
<u>Зміст навчального матеріалу повинен відповідати таким принципам:</u>
відповідність змісту навчального матеріалу вмінню здійснювати математичне моделювання; індивідуальна значущість діяльності.</td></tr>
<tr><td>7 клас</td><td>8 клас</td><td>9 клас</td></tr>
<tr><td>– побудова моделі цілого виразу, формули, лінійного рівняння, системи лінійних рівнянь, лінійної функції;

– переведення умови задачі на математичну мову й навпаки;

– формування поняття про математичні моделі в курсі фізики, безпеки життєдіяльності, професійній діяльності та побуті.</td><td>– побудова моделі раціонального виразу, формули, раціонального дробу, степеня числа із цілим показником, квадратного рівняння, функцій $y=\frac{k}{x}$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$;

– переведення умови задачі на математичну мову й навпаки;

– формування поняття про математичні моделі в курсі фізики, хімії, біології, побуті й професійній діяльності.</td><td>– побудова моделі лінійної та квадратної нерівностей, формули, числового проміжку, системи лінійних нерівностей, системи двох рівнянь з двома змінними, функції $y=ax^2+bx+c$, числової послідовності, прогресій;

– переведення умови задачі на математичну мову й навпаки;

– формування поняття про математичні моделі в курсі фізики, економіки, екології, побуті та професійній діяльності;

– формування уявлень про використання інформаційних технологій у процесі моделювання.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Діяльнісний компонент</td></tr>
<tr><td colspan="3">Дії можна засвоїти лише в процесі їх виконання, тому вчителеві потрібно правильно організувати діяльність учнів.
<u>Етапи організації діяльності учнів і відповідні вміння, що формуються:</u>
– ознайомлення з метою і мотивація щодо важливості оволодіння вміннями (уміння аналізувати, синтезувати, порівнювати, абстрагувати, узагальнювати);
– організація навчальної діяльності, спрямованої на осмислення операційного складу вміння та первинне його закріплення (уміння виокремлювати суттєві й несуттєві ознаки, проводити аналогію, обирати алгоритм дій);</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5">– застосування й закріплення вмінь;
– перенесення сформованого вміння на новий навчальний матеріал.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Рівні сформованості вміння здійснювати математичне моделювання</td></tr>
<tr><td>Рівень</td><td>Сутність уміння</td><td>7 клас</td><td>8 клас</td><td>9 клас</td></tr>
<tr><td>1–3</td><td>Визначення мети побудови моделі.</td><td>1) прийняття поставленої мети.</td><td>1)+2) самостійне уточнення мети.</td><td>1)+2)+3) самостійна постановка мети, що відповідає конкретному результату.</td></tr>
<tr><td>1–3</td><td>Виокремлення характеристик моделі. Формування (створення або підбір) математичної моделі.</td><td>1) інтуїтивне виокремлення елементів завдання на основі аналогічних дій.</td><td>1)+2) свідоме виокремлення елементів завдання.</td><td>1)+2)+3) самостійне виокремлення елементів завдання.</td></tr>
<tr><td>1–3</td><td>Установлення системи відношень моделі.</td><td>1) інтуїтивне встановлення відношень.</td><td>1)+2) свідоме встановлення відношень.</td><td>1)+2)+3) самостійне встановлення відношень з використанням аналогії.</td></tr>
<tr><td>1–3</td><td>Контроль відповідності отриманого результату меті побудови.</td><td>1) інтуїтивний контроль.</td><td>1)+2) довільний контроль.</td><td>1)+2)+3) керований контроль.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Контролювальний компонент</td></tr>
<tr><td colspan="5">Початкова діагностика потрібна для встановлення початкового рівня знань і вмінь. Покрокова діагностика ґрунтується на перевірці знань учнів і контролі правильності виконання завдань. Підсумкова діагностика виявляє рівень сформованості вміння.</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Критерії сформованості вміння:</u>
– повнота й розгорнутість виконуваних дій;
– самостійність виконання дій;
– усвідомленість виконання дій;
– перенесення вміння в нові умови;
– активне використання вміння;
– прагнення до вдосконалення вміння.</td><td colspan="2"><u>Рівні сформованості уміння:</u>
– низький (учневі складно продемонструвати результат побудови математичної моделі до ситуації);
– середній (учень чітко демонструє результат побудови математичної моделі до ситуації на основі раніше виконаних задач, проте здійснює це недостатньо свідомо);
– високий (учень може продемонструвати результати моделювання невідомої раніше ситуації чи підбирає до ситуації декілька моделей).</td></tr>
</table>

У наступних параграфах дослідження розглянуто специфіку формування в учнів зазначеного уміння на основі розробленої нами моделі. Зазначимо, що всі компоненти моделі взаємопов'язано, що забезпечує в кінцевому результаті сформоване вміння.

Для детального розбору процесу розв'язування прикладних задач ми створили схему реалізації методу математичного моделювання (див. рис. 2.2), під час дослідження ми враховували підхід математичного моделювання реальної ситуації, запропонований В. Блюмом [207].

Рис. 2.2. Процес математичного моделювання під час розв'язування прикладної задачі

У схемі представлено структурні компоненти та основні дії процесу математичного моделювання прикладної задачі. Опишемо зображену схему математичного моделювання за відповідними діями 1 – 5.

Таблиця 13

Етапи процесу математичного моделювання прикладної задачі

Етап розв'язання прикладної задачі	**Дії учня в процесі розв'язування прикладної задачі**
I. Розуміння завдання	1. Розуміння й спрощення. У результаті осмислення й класифікації ситуації, на основі досвіду формується модель реальної ситуації (у кожного вона може бути різною). Залежно від задачі виконують її ідеалізацію, спрощення та створюють реальну модель. *Завдання, які повинен виконати учень:* зрозуміти проблему, описану ситуацію; визначити дані, здійснити адаптацію умови й даних для кращого їх осмислення.
II. Побудова математичної моделі	2. Математизація. Здійснюється структурування реальної моделі, а саме виокремлення математичного змісту, математичних термінів, понять, унаслідок чого будується математична модель. *Завдання, які повинен виконати учень:* перейти від реальної моделі ситуації до її математичної моделі.
III. Робота над математичною моделлю задачі.	3. Робота з математичною моделлю. Здійснюється математична обробка та обчислення. *Завдання, які повинен виконати учень:* реалізувати математичну модель, виконати потрібні математичні дії для пошуку відповіді.
IV. Інтерпретація результату	4. Інтерпретація отриманих результатів. З'ясувати співвіднесеність отриманих математичних результатів з дійсністю. *Завдання, які повинен виконати учень:* порівняти отримані на третьому етапі результати з умовою проблемної ситуації. 5. Перевірка отриманих результатів. *Завдання, які повинен виконати учень*: з'ясувати правильність отриманого результату, якщо неправильний, повернутися до першої дії; пояснити остаточну відповідь задачі.

У процесі роботи над прикладною задачею потрібно дотримуватися конкретних кроків, мати чітку схему-шаблон дій процесу розв'язання, тому ми розробили такий план розв'язання прикладної задачі.

План розв'язання прикладної задачі та відповідні кроки математичного моделювання

1. *Розуміння завдання* (зрозуміти проблему, описану в задачі). Вивчити умову задачі (урахувати всі розділові знаки, інтонації та логічні наголоси). Визначити, до якої галузі знань чи сфери життя належить процес, описаний у задачі (фізика, геометрія, сільське господарство, промисловість, побут та ін.). Уявити життєву ситуацію, описану в задачі, подумки взяти участь у ній. Виокремити основні кількісні та якісні характеристики задачної фабули. Побудувати спеціальні питання до змісту задачі й здійснити пошук відповідей.

Рекомендації для вчителя. Учнями потрібно поставити завдання уявити й словесно описати зміст задачі. Метою вчителя є навчити учнів ставити питання й самостійно відповідати на них. Питання повинні бути точними й короткими, рухатися від простих питань до складних, забезпечувати цілісність змісту задачі; бути записаними у різних формулюваннях. Під час уроку можна викликати декількох учнів, щоб вони продемонстрували своє бачення умови й питання задачі.

2. *Побудова математичної моделі*. Виокремити потрібні для розв'язання дані. Якщо потрібно зробити припущення, установити математичні зв'язки. Розбити текст задачі на змістові частини. Увести систему величин, визначити змінні величини та ті, які потрібно дослідити. Виписати відомі формули, що представляють залежності між величинами. Визначити величину, що досліджується через основний аргумент. Наприклад, записати рівняння, формулу, зробити малюнок, ескіз. Здійснити моделювання ситуації, описаної в задачі та вибір моделі, що відповідає оригіналу, перенести результат дослідження на оригінал.

3. *Робота над математичною моделлю задачі.* Виконати потрібні дії для реалізації математичної моделі, здійснити обчислення та внутрішньомодельне розв'язання й підготуватися до вираження його в термінах описаної в задачі ситуації.

4. *Інтерпретація результату.* Оформити результати, пов’язати відповіді з умовою задачі. Поставити питання до отриманих результатів, перевірити їх сумісність з даними в умові задачі, записати остаточну відповідь.

Продемонструємо виконання цих кроків за зразком прикладної задачі, яка була запропонованої на ЗНО 2015 року: «*Плавець під час першого тренування подолав дистанцію в 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець пропливав за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?*»

1. *Розуміння завдання.* Процес, описаний у задачі відбувається у повсякденному житті спортсмена. Часто потрібно зробити аналіз або розробити програму тренувань, яка буде забезпечувати нарощування складності.

2. *Побудова математичної моделі.* Після першого тренування плавець подолав дистанцію 450 м, другого – 500 м, третього – 550 м, тобто маємо справу з арифметичною прогресією з різницею $d = 50\,м$ і першим членом $a_1 = 450\,м$.

Після того, як плавець проплив 1000 м (a_n), він не збільшував дистанцію, а стабільно пропливав по 1000 м.

Математична модель ситуації: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

3. *Робота над математичною моделлю.* Розв’язуємо математичну модель $1000 = 450 + 50(n-1)$, $n = 12$. З’ясували, що було 12 тренувань до досягнення дистанції 1000 м.

За умовою задачі плавець тренувався тричі на тиждень, тоді протягом 10 тижнів у нього було 30 занять.

12 занять (до досягнення відстані 1000 м) + 18 занять (з дистанцією 1000 м).

Допоміжна математична модель: $S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot n$, $S_{12} = \frac{450 + 1000}{2} \cdot 12 = 8700\,м$.

Тоді всього за 10 тижнів $8700\,м + 18000\,м = 26700\,м$.

4. *<u>Інтерпретація результату.</u>* Для запису відповіді на питання задачі: «Скільки всього кілометрів плавець пропливав за перші 10 тижнів тренувань?» потрібно перевести $26700\,м$ у км, що складає $26{,}7\,км$.

Проілюстровані в прикладі кроки ми реалізували під час розв’язування добірки прикладних задач, розробленої до відповідних змістових ліній курсу алгебри основної школи. Кожна змістова лінія має свої моделі.

Основним показником сформованості вміння здійснювати математичне моделювання є свідома діяльність учнів (відповідно до кроків математичного моделювання) під час розв’язування прикладних завдань.

У наступних параграфах ми детально розкриваємо особливості організації навчальної діяльності та методику використання прикладних завдань, що передбачають формування вміння математичного моделювання.

2.2. Методика використання системи задач з теми «Вирази і перетворення над ними» для формування вміння математичного моделювання

Змістова лінія «Вирази і тотожні перетворення над ними» є однією з основних у шкільному курсі алгебри, яку вона невіддільно пов’язано з іншими змістовими лініями; її часто називають ядром математики. Практичне значення тотожних перетворень полягає в їх застосуванні для виведення залежностей, виконанні аналітичних перетворень, знаходженні значень виразів, розв’язуванні рівнянь та нерівностей, дослідженні та побудови графіків функцій. Тотожні перетворення виразів посідають своє місце в інших дисциплінах природничо-математичного циклу, що вказує на їх міжпредметний потенціал. Прикладні задачі цієї змістової лінії сприяють відпрацюванню обчислювальних навичок та підсиленню пізнавального інтересу й мотивації, забезпечують використання алгебраїчних умінь під час розв’язування задач суміжних предметів.

Основні поняття, що супроводжують вивчення змістової лінії: числовий вираз, буквений вираз, тотожність, тотожні перетворення, алгебраїчний вираз, одночлен, многочлен, стандартний вигляд виразу, формули скороченого множення.

Зазначимо, що *тотожні перетворення* передбачають заміну одного аналітичного виразу іншим, тотожно рівним йому, але відмінним за виглядом; перетворення деякої множини, що залишає на місці кожен його елемент. *Тотожно рівними* називають вирази, відповідні значення яких рівні за будь-яких значень змінних.

Уміння, формування яких передбачено цією змістовою лінією, застосовують для перетворення математичних виразів, у процесі розв’язування прикладних задач, причому самостійною моделлю може бути лише вираз. Другий аспект застосування тотожних перетворень – це дослідження з їх допомогою математичних моделей до прикладних задач.

Простежимо розвиток змістової лінії за змістом навчального матеріалу курсу алгебри 7–9 класу.

Таблиця 14

<table>
<tr><th colspan="4">Вирази</th></tr>
<tr><td colspan="3">Алгебраїчні вирази</td><td>Неалгебраїчні (трансцендентні)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Раціональні
(алгебраїчний вираз, який складається зі сталих, змінних, знаків арифметичних дій та дужок).</td><td rowspan="2">Ірраціональні
(8 клас)
(вирази, які складаються з коренів, що сполучаються діями додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня)</td><td rowspan="2">Логарифмічні та показникові (11 клас); тригонометричні (10 клас).</td></tr>
<tr><td>Цілі
(7 клас)
(раціональний вираз, який не містить ділення на змінну).</td><td>Дробові
(8 клас)
(раціональний вираз, який містить ділення на змінну).</td></tr>
</table>

У підрозділі 1.3 сформульовано вимоги, яких ми дотримувалися під час створення системи задач, тому далі зупинимося на використанні прикладних задач, у яких цілий вираз є математичною моделлю. Відповідно до змісту програми учні 7 класу під час роботи над прикладною задачею потрібно повторити теоретичні й практичні аспекти поняття «числові та буквені вирази», формули, тотожні перетворення виразів, вивчити поняття тотожних перетворень цілих виразів (одночленів, многочленів), формули скороченого множення, застосовувати їх при перетвореннях цілих виразів [159, с. 203].

Основними уміннями, які важливо формувати під час вивчення змістової лінії «Вирази і тотожні перетворення над ними» є такі: уміння складати й читати алгебраїчні вирази; уміння знаходити значення виразів; уміння порівнювати значення виразів; уміння визначати вид виразу (цілий, раціональний, дробовий, ірраціональний); уміння здійснювати тотожні перетворення виразів; уміння використовувати формули, закони та властивості дій; уміння зводити вираз до стандартного вигляду; уміння виконувати дії та перетворення над одночленами, многочленами, дробами; уміння доводити тотожності; уміння визначати множину допустимих значень виразів; уміння застосовувати алгебраїчні перетворення під час розв’язування рівнянь та нерівностей; уміння здійснювати перетворення під час дослідження і побудови графіків функцій.

2.2.1. Цілий вираз як математична модель

Основні поняття теми «Цілі вирази»: *вираз зі змінними, цілі раціональні вирази, тотожність, тотожні перетворення виразу, степінь з натуральним показником, властивості степеня з натуральним показником, розкладання многочленів на множники, додавання, віднімання і множення многочленів, формули квадрата двочлена, різниці квадратів, суми і різниці кубів, одночлен, піднесення одночленів до степеня, множення одночленів, многочлен, подібні члени многочлена та їх зведення, степінь многочлена.*

У процесі засвоєння цієї теми передбачено виконання низки дій, з-поміж яких:

–зведення одночленів і многочленів до стандартного виду, виконання арифметичних дій, розкриття дужок;

–розкладання многочлена на множники, винесення за дужки;

–доведення тотожностей з використанням формул скороченого множення;

–розкладання квадратного тричлена на множники;

–спрощення цілих виразів.

Окрім того, додаємо дії, що передбачають застосування математичного моделювання:

–знаходити числові значення алгебраїчних виразів;

–розв'язувати задачі відповідно до трьох кроків математичного моделювання.

У результаті аналізу підручників для 7 класів ми з'ясували частку прикладних задач під час вивчення теми «Цілі вирази» у: 5% – Бевз Г. П. , Бевз В. Г. Алгебра: Підручник для 7 кл. – Київ, 2015 [8]; 10,2% – Бевз Г. П. , Бевз В. Г. Алгебра: Підручник для 7 кл. – Київ, 2007; 8% – Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Харків, 2015 [103]; 12,5% – Кравчук В. Р. Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвіт. навч закл. – Тернопіль, 2014 [79].

Зокрема виявлено, що підручнику [79] є задачі про господарство (основні об'єкти задач – мішки, деталі, пшениця, тканина, зошити, олівці, новобудови), деякі задачі вимагають застосування геометричних знань, тобто потрібно виразити формулу площі деякої фігури виразом.

Більшість задач із проаналізованих підручників [8, 79, 103] не забезпечує повною мірою посилення прикладної спрямованості курсу з урахуванням ключових компетентностей, з-поміж яких: компетентності в природничих науках і технологіях; ініціативність і підприємливість; соціальна й громадянська компетентність; обізнаність і самовираження в галузі культури; екологічна грамотність і здорове життя. У змісті прикладних задач також потрібно враховувати наскрізні лінії ключових компетентностей:

«Екологічна безпека та сталий розвиток»; «Громадянська відповідальність»; «Здоров'я і безпека», «Підприємливість і фінансова грамотність».

Наскрізну лінію «Громадянська відповідальність» можна представити в навчальному процесі задачами соціального змісту, тому розглянемо задачу № 1, де цілий вираз є математичною моделлю задачі.

Задача № 1. Ратологу, що працює на фермі для морських свинок, потрібно розрахувати затрати на їхній догляд і харчування. Відомо, що місячний раціон однієї морської свинки складає 500 г сухого корму, 400 г сіна, а овочів (морква, буряк) на 100 г менше, ніж сухого корму. Для прибирання в загоні розрахованому на дві морські свинки витрачається 12 кг тирси (на місяць) з урахуванням прайс-листа, записати виразом затрати ферми терміном на 3 місяці для 400 морських свинок.

Таблиця 15

Прайс-лист

Товар	Вартість
Сухий корм (1000 г)	180 грн
Сіно лугове (400 г)	20 грн
Буряк (1 кг)	1 грн 30 коп
Морква (1 кг)	1 грн 50 коп
Тирса (6 кг)	30 грн

Розв'язання. Для запису виразу введемо позначення. Кількість морських свинок – n, термін – t. Тоді, $n\cdot(\frac{180}{2}+20+0{,}2\cdot(1{,}50+1{,}30))\cdot t$ – вираз для підрахування витрат на харчування n морських свинок; $30\cdot n\cdot t$ – вираз для визначення витрат на прибирання в загоні. Витрати складуть: $400\cdot(\frac{180}{2}+20+0{,}2\cdot(1{,}50+1{,}30))\cdot 3+400\cdot 30\cdot 3=168672$ грн.

Коментар до задачі. Можна запропонувати учням записати вираз, що представляє витрати на догляд за їхніми домашніми улюбленцями.

Наскрізна лінія «Підприємність і фінансова грамотність» передбачає впровадження в навчальний процесі через задач, у яких цілий вираз є математичною моделлю професійної ситуації. Наприклад, задача № 2 потребує від учня знань про цілі вирази й повторення теми «Відсоток від числа». Задачі такого типу розв'язує бухгалтер, коли нараховує заробітну плату, однак працівник також повинен володіти інформацією про те, як її нараховують, щоб контролювати свої кошти.

Задача № 2. Розрахувати, скільки потрібно виділити бухгалтеру грошей з бюджету фірми, якщо для нарахування заробітної плати для відділу з 5 осіб використовують формулу (1), таблицю окладів і відомо, що кількість робочих днів у місяці 23. Розрахувати заробітну плату кожного працівника.

$$Zarplata = \left(\frac{Oklad}{21}\right) \cdot (Robochi\ dni) + Premia - Podatok \quad (1)$$

Таблиця 16

Нарахування заробітної плати

Посада	Оклад	Премія	Податок 18% від нарахованої суми
Начальник відділу	10000 грн	-	
Старший інспектор	6200 грн	В розмірі посадового окладу	
Секретар	4700 грн	-	
Системний адміністратор	6500 грн	50% від посадового окладу	
Інженер-програміст	5100 грн	-	

На відміну від попередньої задачі, математичну модель, задано в умові у вигляді *цілого виразу.* Під час роботи над задачею учням потрібно розв'язати задачу з використанням даних у таблиці, тобто працювати з образною і знаково-символьними моделями. Задача вимагає від учнів уміння знаходити відсоток від числа й здійснювати обчислення. Вона цікава тим, що її можна змінювати й створювати на її базі основі нові задачі, наприклад, конкретизувати галузь діяльності фірми й збільшити штат працівників.

Особливість наступної задачі полягає в тому, що для її розв'язання потрібно ретельно ознайомитися із професійними коментарями й специфікою поняття фізичний аркуш.

Задача № 3. Редакція має надрукувати рукопис книги, що займає 80 сторінок* тексту у форматі А4. На складі редакційно-видавничого центру було 50 пачок паперу (по 500 фізичних аркушів** кожна). Інженер копіювальних пристроїв уже надрукував 25 книжок. Скільки ще книжок можна надрукувати, якщо відомо, що кількість сторінок на 1 фізичний аркуш становить 4? Відповідь округлити до цілих з недостачею***.

Професійний коментар:

** Рукопис книги до друку має власну кількість сторінок, а після друку на відповідному форматі паперу й зі смугами (полями) текст рукопису змінить кількість сторінок – фізичних аркушів.*

*** Фізичний аркуш – одиниця вимірювання обсягу друкованого видання, що є паперовим аркушем, задрукованим з одного боку або з обох боків.*

**** Уважається, що при отриманні дробового числа ми не можемо надрукувати із залишку паперу повноцінну книгу, тому результатом буде кількість повносторінкових книжок.*

Розв'язання. Нехай D – кількість пачок паперу. Одна пачка містить p фізичних аркушів, уже надруковано B книжок по s сторінок у кожній. На одну книжку використовують $s \cdot \frac{1}{4}$ фізичних аркушів.

Кількість книжок, які можна надрукувати з паперу, що залишився, записується у вигляді *буквеного виразу* (математичної моделі):

$$K = \frac{D \cdot p - B \cdot s \cdot \frac{1}{4}}{s \cdot \frac{1}{4}}$$

Висновок: можна надрукувати ще 122 книжки по 20 фізичних аркушів кожна.

У розглянутій задачі подано професійний коментар, оскільки учнів потрібно ознайомити з термінологією, властивою для професії поліграфіста. Задачу можна використовувати на уроках закріплення знань, вона віддзеркалює застосування знань про цілі вирази на практиці. Математичну модель задачі не задано, тому в учнів виникає потреба в самостійному створенні й дослідженні, однак у формулюванні відповіді важливо врахувати, що 122,5 книжки не друкують, тому потрібно здійснити округлення з недостачею.

Далі наведено цикл задач, під час розв’язання яких слід ураховувати поняття відсотка.

Важливо також продемонструвати учням задачі, у яких подано надлишкову інформацію.

Рис. 2. 3. Збір сортового чайного листя

Задача № 4. Сортовий чайний лист містить $75-78\,\%$ вологи, з нього з вмістом вологи 78% виготовляють чорний чай шляхом його завалювання, скручування, сортування, ферментації й сушіння. Сушіння призупиняє дію ферментів і фіксує створені в процесі попередніх операцій властивості чайного листа. Його проводять у сушильних апаратах до кінцевої вологості продукту 4%. Скільки було потрібно свіжого чайного листа для того, щоб отримати упаковку чорного чаю масою 500 г?

Розв’язання. Для отримання 500 г сухого чаю потрібно: $500:0{,}04=12500$ г сортового вологого чайного листя. Інформація про сортовий чайний лист з вмістом вологи 78% є надлишковою, тому в процесі розв’язання не використовується. Можна запропонувати учням самостійно відшукати задачі такого типу з-поміж інших, запропонованих учителем.

Задача закритого типу, міжпредметного (історичного) змісту, математична модель задачі – арифметичний вираз, учневі нескладно будувати його самостійно.

Задача № 5. Під час розкопок археологи знайшли скарб з античними монетами (чеканними та литими). Литі монети складали 45% від загальної кількості. Скільки відсотків становлять литі монети від чеканних, якщо загальна кількість монет складає 500 штук?

Розв’язання: литі монети – $500 \cdot 0{,}45 = 225$; чеканні $500 - 225 = 275$. Литі монети становлять від чеканних $\frac{225}{275} \cdot 100\% \approx 81\%$. *Відповідь:* Литі монети складають 81 % від чеканних монет.

Коли на практиці виникають ситуації, у яких потрібно з’ясувати, скільки від загальної кількості предметів чи осіб наділено певною характеристикою, то допоміжними можуть бути такі задачі.

Задача № 6. Під час проведення всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з галузей знань і спеціальностей, для визначення призових місць потрібно дотримуватися таких вимог: кількість переможців не може перевищувати 25% від загальної кількості авторів наукових робіт; з-поміж призерів потрібно розподілити дипломи I, II і III ступеня, щоб вони становили відповідно 20%, 30% і 50%. Записати вирази для визначення кількості дипломів I, II і III ступеня. Визначити, скільки дипломів і якого ступеня буде вручено, якщо в конкурсі бере участь 120 студентів.

Розв’язання. Нехай m – загальна кількість учасників конкурсу. Тоді 25% переможців: $m \cdot 0{,}25$. Далі запишемо окремо для:

Дипломів I ступеня – $(m \cdot 0{,}25) \cdot 0{,}2 = 0{,}05 \cdot m$.

Дипломів II ступеня – $(m \cdot 0{,}25) \cdot 0{,}3 = 0{,}075 \cdot m$.

Дипломів III ступеня – $(m \cdot 0{,}25) \cdot 0{,}5 = 0{,}125 \cdot m$.

Підрахуємо для загальної кількості учасників $m = 120$. Отримаємо 6, 9, 15 дипломів.

Відповідь: із 120 учасників конкурсу дипломи I ступеня отримають 6 осіб, дипломи II ступеня – 9 осіб, а дипломи III ступеня – 15 осіб.

Наступна задача є передовсім інформаційною. У її фабулі повідомлено про продукти, які можна виготовити з нафти. Числа в умові наперед не задано, тому можна запропонувати учням підібрати їх самостійно.

Задача № 8. З нафти виготовляють багато товарів, потрібних у промисловості та побуті. Відомо, що з 1 тонни нафти можна виготовити v% вазеліну, або k% аспірину, або p% парафіну, або b% бензину, або s%

синтетичних тканин, або q% пластику. Установити, скільки товарів різних видів можна виготовити з цистерни нафти об'ємом N тонн (відповідь записати в кг)?

Розв'язання: Задача полягає у знаходженні відсотка від числа, тобто, на застосування відомої моделі знаходження відсотка від числа:

$\text{Число} \cdot \frac{\text{Відсоток від числа}}{100}$.

$$m_{\text{вазеліну}} = N \cdot \frac{\text{v}\%}{100},\ m_{\text{аспірину}} = N \cdot \frac{\text{k}\%}{100},\ m_{\text{парафіну}} = N \cdot \frac{p\%}{100},$$

$$m_{\text{бензину}} = N \cdot \frac{\text{b}\%}{100},\ m_{\text{синтетичних тканин}} = N \cdot \frac{s\%}{100},\ m_{\text{пластику}} = N \cdot \frac{\text{q}\%}{100}.$$

Слід перевести отримані результати в кілограми, для цього використовуємо: $1(m)\cdot 1000$ $\boxed{m\ (\text{тон}) \cdot 1000}$.

Далі розглянемо задачу, що виникає на практиці в побуті й допомагає отримати розчин потрібної концентрації з використанням додаткової інформації.

Задача № 9. Під час консервування господині часто замість оцтової кислоти використовують оцтову есенцію (розчин з масовою часткою оцтової кислоти 80%). Як потрібно розвести водою оцтову есенцію масою 35 *г*, щоб отримати 9% розчин оцтової кислоти?

Розв'язання. Модель знаходження маси оцтової кислоти в 35 *г* есенції –

$$m_{кислоти} = w_{кислоти} \cdot m_{розчину} = 0{,}8 \cdot 35 = 28г.$$

Модель – знаходження числа за його відсотком: знаходження маси 9% розчину, у якому міститься 28 *г* оцтової кислоти

$$m_{9\%\,розчину} = \frac{28г \cdot 100\%}{9\%} = 311г$$

Розрахуємо масу води, потрібну для розведення розчину.

$$m_{води} = m_{9\%\,розчину} - m_{80\%\,розчину} = 311г - 35г = 276г$$

$$V_{води} = \frac{276г}{1\,г/мл} = 276мл$$

Відповідь: потрібно додати 276 *мл* води до 45 *мл* оцтової есенції.

Важливо розглянути задачі, які передбачають зниження ціни на продукцію. Для цього важливо нагадати учням основні формули.

Задача № 10. У мережі магазинів «Спортивна родина» й «СпортМега» розпродаж. «Спортивна родина» провела акцію: ціну на пару кросівок знизили на 20%, потім нову ціну ще на 25%, після чого ціна становила 1200 грн. У «СпортМега» ціну на таку саму пару кросівок – 1500 грн знизили на 25%, а потім нову ціну знизили ще на 40%. Якою була ціна товару в магазинах до і після знижок? На скільки відсотків знизилася ціна товарів у кожному з магазинів?

Розв'язання. Нагадаємо формули відсоткових розрахунків: якщо початкове значення збільшилося на $x\%$, то потрібно домножити на коефіцієнт $k=\left(1+\frac{x}{100}\right)$; якщо початкове значення зменшилося на $x\%$, то потрібно домножити на коефіцієнт $k=\left(1-\frac{x}{100}\right)$.

Розрахуємо ціни для мережі магазинів «СпортМега». За умовою 1500 грн – початкова ціна товару, після зниження на 25% ціна складає $1500\cdot(1-0{,}25)=0{,}75\cdot 1500=1125$ (грн), після повторного зниження на 40% $1125\cdot(1-0{,}4)=0{,}6\cdot 1125=675$ (грн). Ціну знижено на 55%.

Розрахуємо ціни для мережі магазинів «Спортивна родина». Нехай $a-$ початкова ціна товару, після зниження на 20% ціна складає $a\cdot(1-0{,}2)=0{,}8\cdot a$ (грн), після повторного зниження на 25% $a\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}25)=a\cdot 0{,}8\cdot 0{,}75=a\cdot 0{,}6=1200$ (грн). Початкова ціна товару становить $a=\frac{1200}{0{,}6}=2000$ (грн). Ціну знижено на 60%. Дуже зручно проаналізувати систему знижок і цін у двох магазинах за таблицею 17.

Таблиця 17

Система знижок у магазинах

	Початкова ціна	Знижка №1	Знижка №2	Загальна знижка	Ціна після двох знижок
«СпортМега»	1500 грн	25%	40%	55%	675
«Спортивна родина»	2000 грн	20%	25%	60%	1200

Майбутніх працівників ІТ-компаній часто перевіряють на логічне мислення та вміння моделювати. Наведемо приклад задачі з реальної співбесіди, де математична модель – цілий вираз. Таку задачу ми узагальнили до виведення загальної формули.

Задача № 11. Під час співбесіди щодо прийому на роботу в ІТ-компанію програмісту поставили завдання: написати функцію, яка визначає градусну міру кута між годинниковою та хвилинною стрілками о 3 годині 10 хвилин03^{10}. Як це зробити?

Розв'язання. Спочатку встановимо загальну модель знаходження градусної міри між годинниковою і хвилинною стрілками в будь-який момент часу. $h=\frac{360°}{12}=30°$ $h=\frac{360°}{12}=30°$ – градусна міра кута, утвореного годинною стрілкою і початком відліку (12.00), $m=\frac{360°}{60°}=6°$ $m=\frac{360°}{60}=6°$ – градусна міра кута, утвореного хвилинною стрілкою і початком відліку.

Загальна модель знаходження градусної міри між годинниковою та хвилинною стрілками (*g – годин, x – хвилин)* : $T=\left(g+\left(\frac{x}{60}\right)\right)\cdot h-x\cdot m$, $T=\left(g+\left(\frac{x}{60}\right)\right)\cdot 30°-x\cdot 6°$. За умовою: $g=3$, $x=10$. $T=\left(g+\left(\frac{10}{60}\right)\right)\cdot 30°-10\cdot 6°=35°$

Відповідь: градусна міра кута між годинниковою та хвилинною стрілками о 3 годині 10 хвилин становить $35°$.

2.2.2. Раціональний вираз, що містить ділення на змінну як математична модель

Основні поняття теми: степінь із цілим показником та його властивості, стандартний вигляд числа, раціональні вирази, раціональні дроби, основна властивість раціонального дробу, арифметичні дії з раціональними дробами.

Для раціонально виразу важливими є допустимі значення змінних, що входять до його складу, тобто значення, за яких вираз має зміст. Знаменник раціонального дробу не може бути нульовим многочленом, тому допустимими значеннями будуть такі, за яких знаменник дробу не дорівнює нулю.

Вивчення тотожних перетворень раціональних дробів, дробових та ірраціональних виразів (вирази з квадратним коренем) передбачено у 8 класі. Зокрема розширюється поняття степеня, учнів ознайомлюють з поняттям степеня з цілим від'ємним показником та відповідними перетвореннями над виразами, які його містять. Під час розв'язування рівнянь та нерівностей у 9 класі використовують тотожні перетворення цілих і дробових виразів. Розкладання квадратного тричлена на множники (виведення формули квадратного тричлена, побудова графіка функції).

Розглянемо задачу *професійного змісту, у якій математичну модель – дробово-раціональний вираз* – учневі потрібно створити з використанням умови.

Задача № 12. Адміністратори соціальної мережі оцінюють коректність завантажених користувачами в профіль фотокарток. Один адміністратор оцінив 200 фотокарток за *a хв,* а другий – 250 за *b хв.* Скільки фотокарток оцінюють адміністратори за 4 години роботи? Уважати, що адміністратори працюють з постійною продуктивністю.

Розв'язання. Перший адміністратор за 1 хвилину оцінить $\frac{200}{a}$ фотокарток, другий адміністратор за 1 хвилину – $\frac{250}{b}$ фотокарток. Тоді за 4 години ($4 \cdot 60 = 240$ хв) перший і другий адміністратори разом оцінять $\frac{200}{a} \cdot 240 + \frac{250}{b} \cdot 240 = \left(\frac{200}{a} + \frac{250}{b}\right) \cdot 240$.

За такою схемою розв'язання й аналогічною математичною моделлю можна створити задачу про друк аркушів двома робітниками за хвилину.

Задача міжпредметного змісту, рівень складності II, тип A, математичну модель задано.

Задача № 13. На рисунку подано розчини, якими людина користується в побуті. На кожній етикетці розчину вказано %, тобто масова частка розчиненої речовини в розчині, яка відповідає масі речовини, що міститься в 100 г розчину. Знайти: а) масу розчиненої речовини й масу води (оцет, аміак, перекис водню), що знаходяться в кожному з розчинів на рисунку 2. 4; б) масу розчиненої речовини й окремо загальну масу допоміжних речовин.

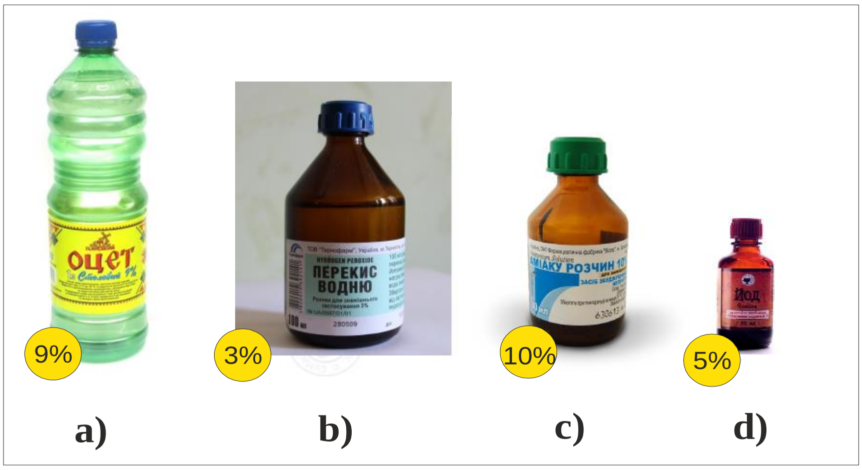


Рис. 2. 4. Розчини

Розв'язання. Математичною моделлю задачі є формула знаходження масової частки речовини в розчині (1).

$$w_{розч.речовини} = \frac{m_{розч.речовини}}{m_{розчину}} \cdot 100\% = \frac{m_{розч.речовини}}{m_{розч.речовини} + m_{розчинника}} \cdot 100\%$$

Столовий оцет 9%: у 900 *г* оцту – 81 *г* оцтової кислоти, 819 *г* води.

Перекис водню 3%: у 100 *мл* – 3 *мл* гідроген пероксиду, 97 *мл* води.

Аміак 10% в 40 *мл*: у 40 *г* –4 *г* аміаку, 36 *г* води.

Йод 5% у 20 *мл* спиртового розчину: у 20 *г* – 1 *г* йоду, 19 *г* допоміжних речовин (етанол, вода, калію йодид).

Задача міжпредметного змісту, рівень складності II, тип B, математичну модель не задано.

Задача № 14. Загальний електричний опір ділянки кола, що складається з двох резисторів, з’єднаних паралельно, становить $R_{заг} = 1{,}6\ кОм$, опір $R_1 = 8\ кОм$. Визначити опір резистора R_2.

Розв’язання. Математична модель – $\frac{1}{R_{заг}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, тоді $R_2 = \frac{R_{заг} \cdot R_1}{R_{заг} - R_1}$.

Задачі з різним змістом можуть мати одну математичну модель, а точніше використовують той самий вираз. Розглянемо декілька задач, що матимуть однакову математичну модель $Y = \frac{a \cdot b}{a + b}$. Після роботи з такими задачами можна дати сильним учням завдання створити такі приклади самостійно.

Рис. 2.5. Електрична плитка

Задача № 15. На електричній плитці (рис. 2.5), обладнаній двома роздільними нагрівальними елементами (ТЕНами) вода закипає за 15 хвилин, якщо ввімкнено ТЕН 1, а якщо ввімкнено ТЕН 2, то вода закипає за 20 хвилин. За скільки часу закипить вода, якщо обидва нагрівальні елементи буде ввімкнено одночасно. *Відповідь:* $T = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$, 8,6 хвилини.

Задача № 16. У меблевій майстерні залишився шматок ДСП у формі прямокутного трикутника, сторони якого *a* і *b*. З нього потрібно так вирізати квадрат, щоб його вершина належала прямому куту, а протилежну до неї було розміщено на гіпотенузі прямокутного трикутника. Знайти сторону такого квадрата. *Відповідь:* $Y = \frac{a \cdot b}{a + b}$.

Задача міжпредметного змісту, рівень складності II, тип C, математичну модель не задано.

Задача № 17. Поливаючи газон біля дому, хлопчик зацікавився, з якою швидкістю витікає вода зі шланга. Він помітив, що відро об’ємом 10 літрів наповнюється за 8 секунд. Потім виміряв рулеткою внутрішній діаметр шланга – 1,9 см. Вивести формулу для визначення швидкості витікання води зі шланга та обчислити її.

Розв'язання. Шланг має форму циліндра (рис. 2.6), тому довжина шланга l дорівнює висоті циліндра.

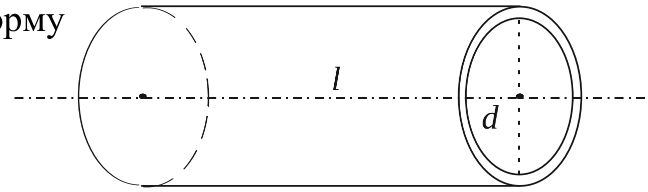


Рис. 2.6. Модель шланга

Уведемо допоміжні позначення:

V – об'єм води, $S_{осн}$ – площа поперечного перерізу,

d – діаметр шланга, t – час, за який вода наповнює відро об'ємом V, v – швидкість води, яка витікає із шланга.

Запишемо формулу, яка виражає внутрішній об'єм шланга: $V = S_{осн} \cdot l = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot l$. Виразимо довжину шланга через об'єм і отримаємо $l = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot l = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2}$ (1). Довжина шланга – це шлях, який долає вода за час t: $l = v \cdot t$, виразимо швидкість води $v = \frac{l}{t}$ (2), підставимо формулу (1) в (2) і отримаємо $v = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2 \cdot t}$ (3).

Тепер підставимо вхідні дані $V = 10л = 10 \cdot 10^{-3} м^3 = 10^{-2} м^3$, $t = 8$ с, $d = 1{,}9 см = 1{,}9 \cdot 10^{-2} м$ у формулу (3) й отримаємо швидкість води.

$v = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{3{,}14 \cdot (1{,}9 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 8} = \frac{1}{3{,}14 \cdot 3{,}61 \cdot 10^{-2} \cdot 2} = \frac{10^2}{6{,}28 \cdot 3{,}61} \approx 4{,}41 м/с$ (округлимо з недостачею), $v \approx 4{,}41 м/с$.

Міжпредметні зв'язки слугують засобом розкриття сучасних тенденцій розвитку науки. Застосування математичних методів, наприклад, під час вивчення хімії дає змогу кількісно оцінювати закономірності хімічних процесів, логічно обґрунтовувати закони й теорії. Також у хімії застосовують графічні моделі (графіки функцій), що віддзеркалюють: залежність відсоткової концентрації розчину від маси розчиненої речовини в масі цього розчину; теплового ефекту реакції від маси утвореної речовини; повноти окислення речовини від температурних умов; ступеня дисоціації речовини від концентрації його розчину й т. д. У названих випадках математичне моделювання є засобом вивчення й дослідження хімічних процесів, результатом застосування якого є систематизоване знання дисципліни та її міжпредметного потенціалу.

Дослідження процесів у галузі господарювання можна здійснити із застосуванням математичних методів, а саме, у вивченні попиту на товари широкого вжитку, потреби в робочій силі. Прогнозування економічних явищ не можливе без використання економіко-математичних моделей, у яких подано їх спрощений опис і враховано найбільш суттєві фактори досліджуваного явища. Застосування математичного моделювання в економіці дозволяє описати математичними співвідношеннями суттєві зв'язки між економічними змінними та об'єктами.

Застосування математичного моделювання в економічних задачах під час вивчення математики має такі позитивні риси [148, с. 49 – 53]:

- демонструє зв'язок теорії й практики;
- сприяє застосуванню математичного апарату для дослідження економічних процесів і явищ;
- допомагає в побудові математичних моделей економічних ситуацій;
- сприяє знаходженню математичних залежностей у реальних виробничих процесах.

Задача міжпредметного змісту, тип В, рівень ІІ, математичну модель не задано.

Задача № 18. Родина вирішила розмістити в банку вклад сумою 20 000 грн. на тривалий період. Банк запропонував дві схеми росту відсоткових грошей: простих і складних відсотків. Відсоткова ставка в банку 12 % річних. Розрахувати, за якою зі схем родина зможе накопичити більше грошей за 11 років. Графічно показати процес нарощування відсоткових грошей.

Розв'язання. Розрахуємо грошові нарахування за відповідними формулами (1) і (2).

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right) \quad (1) \text{ – модель нарахування простих відсотків,}$$

$$A_n = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad (2) \text{ – модель нарахування складних відсотків, } n \text{ – роки,}$$

p – відсоткова ставка, A_0 – початковий вклад, A_n – нарощений капітал.

Таблиця 18

Роки	Прості відсотки	Складні відсотки
1	22000	22000
2	24000	24200
3	26000	26620
4	28000	29282
5	30000	32210,2
6	32000	35431,22
7	34000	38974,34
8	36000	42871,78
9	38000	47158,95
10	40000	51874,85
11	42000	57062,33412

Аналіз результату дозволяє стверджувати, що у порівнянні з початковим вкладом сума, накопичена за схемою складних відсотків протягом 11 років зросла у 2,9 разів, а за простими відсотками у 2,1 рази.

Побудуємо графік отриманих результатів.

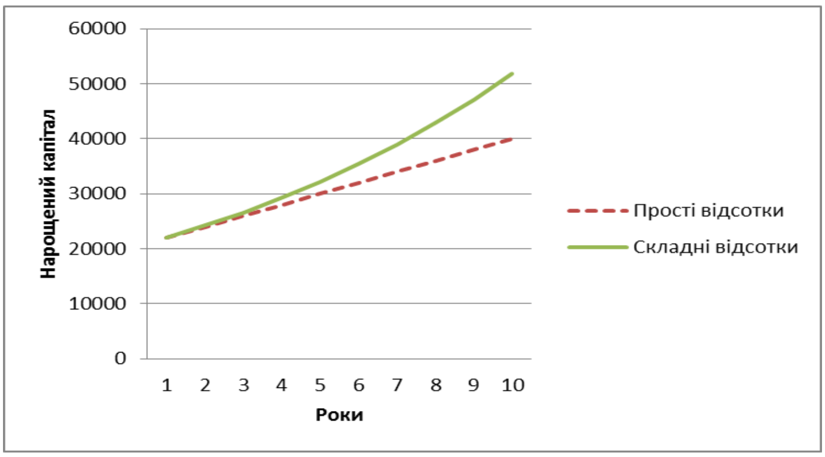


Рис. 2.7. Графіки нарахування простих і складних відсотків

За графіком (рис. 2.7) можна зробити висновок, що нарощення капіталу відбувається швидше за схемою складних відсотків.

Задача міжпредметного змісту, тип А, рівень І, математичну модель задано, основне поняття степінь з цілим показником, стандартний вигляд числа.

Задача № 19. Визначити маси планет за даними в таблиці, заданими константами й відповідними формулами: $M = \rho \cdot V$, для обчислення об’єму планет скористатися формулою $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$. Результати подати у вигляді числового ряду в порядку зростання.

Таблиця 19

Рис. 2. 8. Сонячна система

Планета	*Радіус*	*Густина*
Меркурій	$2439{,}7\ км$	$5{,}427\ г/см^3$
Венера	$6051{,}8\ км$	$5{,}204\ г/см^3$
Земля	$6371{,}3\ км$	$5{,}515\ г/см^3$
Марс	$3396{,}2\ км$	$3{,}9335\ г/см^3$
Юпітер	$69911\ км$	$1330\ кг/м^3$
Сатурн	$60268\ км$	$687\ кг/м^3$
Уран	$25559\ км$	$1270\ кг/м^3$
Нептун	$24764\ км$	$1{,}638\ г/см^3$

2.2.3. Вирази з квадратним коренем як математичні моделі

На етапі мотивації вивчення теми можна запропонувати учням розглянути задачу про знаходження ширини квадратної ділянки площею 144 м^2. Математичною моделлю задачі є рівняння $a^2 = 144$. У процесі розв’язання рівняння ми отримаємо два корені: додатній $a = \sqrt{144} = 12$ і від’ємний, який не задовольняє початкову умову.

Основні типи перетворень ірраціональних виразів: винесення множника за знак кореня, внесення множника під знак кореня, звільнення дробу від ірраціональності в знаменнику.

Задача професійного змісту, рівень І, тип А, математичну модель не задано.

Задача № 20. Під час проєктування ремонту в танцювальній студії з прямокутної кімнати площею $132\,м^2$ утворили квадратний зал для танців. Відомо, що частини кімнати, що залишилися, розподілили на зони так: $5м \times 3м$ віддали на вестибюль, $3\,м \times 4м$ – роздягальня, $3\,м \times 2м$ – туалет, $4\,м \times 2м$ – душова, $5\,м \times 2\,м$ – костюмерна. Який розмір після проєктування матиме танцювальний зал?

Розв'язання. $132\,м^2 - (15\,м^2 + 12м^2 + 6м^2 + 8м^2 + 10\,м^2) = 81\,м^2$, тоді параметри залу $9\,м \times 9\,м$.

Рис. 2.9. Кулон

Задача міжпредметного й професійного змісту, математичну модель не задано, тут потрібно використовувати звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу й винесення множника за знак кореня.

Задача № 21. Ювеліру потрібно виготовити партію кулонів із срібного дроту (рис. 2.9) на сувеніри. Скільки дроту потрібно взяти для виготовлення кулонів (50 шт Ø 0.3 мм, 100 шт Ø 0.4 мм, 50 шт Ø 0.5 мм), якщо відповідно до замовлення висота кожного кулона становить 16 мм? Ціна за 100 см дротини: Ø 0.3 мм – 40 грн, Ø 0.4 мм – 60 грн., Ø 0.45 мм – 60 грн, одна спайка стиків коштує 40 грн, петелька для кулона 20 грн.

*Примітки. * Ø – діаметр дротини.*

*** Кількість спайок у кулоні – 7.*

Розв'язання. Геометрична модель задачі – це рівносторонній трикутник висотою $h = 16мм$, у який вписано коло з центром у точці перетину бісектрис. Для того, щоб визначити скільки потрібно дроту для виготовлення кулона потрібно знайти периметр трикутника і довжину кола, тобто вираз для знаходження довжини дроту $P = P_\Delta + l + h$.

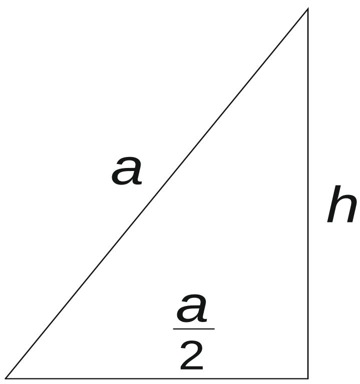


Рис. 2. 10. Схематичне зображення фрагменту кулону

Визначимо довжину кола. Висота в правильному трикутнику буде медіаною й бісектрисою, тому врахуємо властивість медіан точкою перетину ділитись у відношенні 2:1. Тому, радіус кола становить – $r = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16\ мм$, $l = 2 \cdot \pi \cdot \frac{16}{3} \cdot = \frac{32\pi}{3}$.

Визначимо периметр трикутника. Розглянемо рис. 2.10. За теоремою Піфагора: $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 16^2$. Тоді, $a^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 16^2$,

$a^2 = \frac{16^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}$, $a = \sqrt{\frac{16^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}} = \frac{16}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}} = 16 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$. $P = 3 \cdot \frac{32}{\sqrt{3}}$, позбудемось від ірраціональності в знаменнику, $P = 3 \cdot \frac{32 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 32\sqrt{3}$.

$P = P_{\Delta} + l + h = 32\sqrt{3} + 16 + \frac{32\pi}{3} \approx 55{,}36 + 16 + 33{,}49 \approx 104{,}85$.

Округлюємо з надлишком (беремо дротину із запасом) – 105 мм.

Перейдемо до розрахунку вартості виконаних робіт. У процесі виготовлення кулона здійснюється 7 спайок, що становить 280 грн, і додатково враховується вартість установлення петельки – 20 грн, що в сумі складає 300 грн.

Відповідь. Вартість одного кулона: Ø 0.3 мм – 304 грн 20 коп, Ø 0.4 мм – 306 грн 30 коп, Ø 0.5 мм – 308 грн 40 коп. Партія сувенірів коштує 61 тисячу 260 грн.

У процесі вивчення змістової лінії «Вирази і перетворення над ними» в учнів буде сформовано: знання про різні типи моделей (образні та знаково-символічні); уміння будувати математичні моделі процесів і явищ у вигляді числових і буквених виразів, а саме, у вигляді знаково-символічних моделей; уміння здійснювати кроки математичного моделювання під час розв’язування прикладних задач, де математична модель – вираз.

2.3. Методика використання системи задач із теми «Рівняння і нерівності» для формування вміння математичного моделювання

На змістову лінію «Рівняння та нерівності» в курсі алгебри виокремлено більше годин порівняно з іншими змістовими лініями. Рівняння або нерівність може бути математичною моделлю реальної ситуації або частиною розв'язання задачі. Для більш детального розкриття методики створення системи задач розглянемо окремо системи задач для навчальних тем «рівняння» та «нерівності».

Найпростіші лінійні рівняння з'являються у 5–6 класах під час роботи над текстовими задачами і охоплюють значну частину курсу математики. Учні навчаються за умовою задачі складати відповідне рівняння й, навпаки, за рівнянням складати задачі. Саме в контексті такої роботи над текстовими задачами учням допомагають лінійні рівняння.

У 5-му класі рівняння розглядають під час вивчення розділу «Натуральні числа і дії над ними». Наведемо приклад визначення поняття «рівняння» із чинного підручника: «рівність, що містить невідоме число, називається рівнянням»; «значення невідомого, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називається розв'язком, або коренем рівняння» [97]. Закріплюються уміння розв'язувати й застосовувати рівняння під час розв'язування текстових задач (на рух, на роботу, задачі, пов'язані з вартістю товару). Учні навчаються розв'язувати рівняння $a+x=b$, $x-a=b$, $\frac{x}{a}=b$, $\frac{a}{x}=b$, виробивши в процесі правило знаходження невідомого. На цьому етапі учні навчаються аналізувати структуру лінійного рівняння, планувати результати й здійснювати потрібні перетворення.

Учні використовують рівняння під час розв'язування задач у контексті вивчення теми «Раціональні числа і дії з ними». У 6–7 класах учні розв'язують лінійні рівняння зі змінною в обох частинах рівності. Окрім цього, у процесі розв'язання засвоюють рівносильні й тотожні перетворення, відпрацьовують техніку обчислень.

Отже, тотожні перетворення – це перетворення виразів, а рівносильні – це перетворення формул. Під час роботи над рівнянням зведення подібних є тотожнім перетворенням, а перенесення елементів рівняння з однієї частини в іншу зі зміною знака є рівносильним.

2.3.1. Лінійне рівняння як математична модель

Відповідно до навчальної програми на вивчення теми «Лінійні рівняння та їх систем», передбачено 18 годин. Доцільним є використання прикладних задач, у яких математичною моделлю є лінійне рівняння, згідно із запропонованою програмою (див. Додаток Д) у таких темах: «Розв’язування задач за допомогою рівнянь», «Лінійні рівняння та їх системи як математичні моделі текстових задач», «Розв’язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь».

Основні уміння, які формуються в процесі вивчення теми: *наводити приклади лінійних рівнянь, складати лінійні рівняння до задач, здійснювати перетворення лінійних рівнянь та розв’язувати їх.*

Важливо виокремити вміння, якими повинен володіти учень під час вивчення теми й застосування математичного моделювання: *розкривати зміст поняття лінійного рівняння в процесі створення математичних моделей до прикладних задач; розпізнавати прикладні задачі, у яких рівняння може бути математичною моделлю або допоміжним кроком її реалізації.*

Рис. 2.11. Структура модельно-змістової частини моделі

У процесі аналізу підручників з алгебри для 7 класу щодо наявності прикладних задач було з’ясовано, що на сьогодні їх кількість з теми «Лінійні рівняння» становить: 20,8% – Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра: Підручник для 7 кл. – К., 2015 [8]; 41,4% – Кравчук В. Р. Алгебра: підручник для 7 кл. – Тернопіль, 2014[79]; 44,9% – Мерзляк А. Г. та ін. Алгебра: підруч. для 7 кл. – Х., 2015 [103]. Зокрема, в підручнику [8], значну частину задач прикладного змісту подано в темі «Розв’язування задач за допомогою рівнянь», до того ж більшість з них є текстовими задачами. Запропоновано задачі з історичним змістом, велику кількість задач на рух, є задачі на сплави.

На думку В. Г. Бевз, нині є актуальною проблема осучаснення змісту системи вправ у підручниках математики з погляду реалізації провідних методичних підходів й особливостей розвитку молодого покоління [13]. У підручниках для 8 й 9 класу, рекомендованих чинною програмою, уже урізноманітнено систему задач на основі її доповнення відкритими задачами, практичними завданнями, комплексними задачами [9, 10], задачами типу «Math for life» [138, 139]. У нашому дослідженні враховано такий підхід, тому було створено прикладні задачі, які відповідають сучасним інформаційним запитам учнів та програмі з математики [112].

Розглянемо добірку прикладних задач, укладену відповідно до вимог, описаних у підрозділі 1.3, що віддзеркалює методику формування в учнів уміння математичного моделювання.

Перша задача *побутового змісту, типу В, рівня І,* у якій математичну модель не задано. Зміст задачі відповідає наскрізній лінії «Екологічна безпека та сталий розвиток». Очікуваною математичною моделлю є лінійне рівняння.

Задача № 1. Учні беруть участь у весняно-літній акції «Чисте місто», основною метою якої є прибирання парків міста від сміття кожної останньої суботи місяця. Після одного прибирання в середньому вилучається по 20 кг макулатури й по 50 кг пластикових пляшок, під час останніх двох прибирань вилучено на 10 кг менше пластикових пляшок і на 15 кг менше макулатури, однак було додатково відправлено на утилізацію 30 кг батарейок. Установити, протягом якого терміну учні у фонд школи відклали 1846 грн, якщо на пункті прийому вторинної сировини встановлено такі тарифи: 1 кг пластикових пляшок – 4 грн 60 коп, 1 кг макулатури – 2 грн 50 коп, а батарейки – 1 грн за кг.

Розв'язання. Обчислимо, скільки грошей отримали учні за *x* прибирань $20 \cdot 4{,}6 + 50 \cdot 2{,}5 = 217$ *грн*, далі за останні 2 прибирання $2 \cdot (10 \cdot 4{,}6 + 35 \cdot 2{,}5 + 30) = 2 \cdot 163{,}5 = 327$ *грн*. Запишемо лінійне рівняння, яке буде математичною моделлю задачі: $217 \cdot x + 327 = 1846$ *грн*. Після перетворень отримаємо $217 \cdot x = 1519$, $x = 7$. *Відповідь:* 7 суботніх прибирань.

Друга задача відповідає наскрізній лінії «Підприємливість і фінансова грамотність» і має професійний зміст. Варто нагадати учням основні способи округлення під час запису відповіді до задачі.

Рис. 2. 12. Заготовки для виготовлення пластикових пляшок

Задача № 2. Харчове підприємство розливає мінеральну воду в пляшки об'ємом 0,5 і 2 літри. Економісти підрахували, що продукція ефективніше продається, якщо півлітрових пляшок буде на третину менше, тому і здійснили відповідне замовлення заготовок (рис. 2. 12). Відомо, що маса заготовки для півлітрової пляшки становить 22 г, а для дволітрової – 48 г. Для виконання замовлення завод використав 1 тонну полімеру. Визначити, скільки води вдалося розлити в пляшки?

Розв'язання. Нехай $m_{0,5л} = 22г$, $m_{2л} = 48г$. Пригадаємо, що $1\,тонна = 10^3\,кг = 10^6\,г$. Тоді, з 1 тонни полімеру можна отримати

$$\frac{x \cdot m_{0,5л}}{3} + x \cdot m_{2л} = 10^6, \quad x \cdot \left(\frac{m_{0,5л}}{3} + m_{2л}\right) = 10^6, \quad x = \frac{10^6}{\frac{22}{3} + 48} = \frac{10^6 \cdot 3}{166} \approx 18072{,}2892$$

штук. Округлюємо отримане число з недостачею й отримаємо 18072 пляшки по 2 літри й 6024 пляшки по 0,5 літра. Визначимо, скільки мінеральної води завод зможе розлити в отриману кількість пляшок: 1) $2 \cdot 18072 = 36144$ літри у двохлітрові пляшки; 2) $2 \cdot 6024 = 3012$ літрів – у пляшки по 0,5 літра. *Відповідь:* розлито 39 156 літрів мінеральної води.

Наступні задачі демонструють застосування поняття «Лінійне рівняння з двома змінними». Задачі мають *побутовий зміст*, належать до *типу В*, рівня складності І. Математичну модель в обох задачах не задано; вона має вигляд лінійного рівняння з двома змінними.

Задача № 3. Під час вистави ілюзіоніст обрав одного глядача із залу і запропонував загадати число. Далі ілюзіоніст запропонував алгоритм дій із загаданим числом, які учасник виконав, і назвав отримане число. Як ілюзіоніст угадав число, якщо відомий алгоритм дій, які учасник виконав із загаданим числом?

Алгоритм: загадати число, додати 3, помножити на 2, відняти 4, відняти задумане число, помножити на 2, відняти 1.

Розв'язання: наведемо у вигляді послідовних кроків.

Таблиця 20

Загадати число	x
Додати 3	$x+3$
Помножити на 2	$2x+6$
Відняти 4	$2x+2$
Відняти задумане число	$x+2$
Помножити на 2	$2x+4$
Відняти 1	$2x+3$

З останньої дії й отриманого числа можна скласти рівняння:

$Y = 2x + 3$, де Y – число, що утворилося в результаті дій, x – загадане число. Щоб знайти загадане число, потрібно: $x = \frac{Y-3}{2}$.

Задачу можна також використати на застосування відомостей про відсотки у практичній діяльності. У задачі № 4 потрібно створити математичну модель у вигляді лінійного рівняння з двома змінними із застосуванням знання про відсоток та пропорції.

Задача № 4. Парфумеру для створення нового аромату потрібно отримати 12% розчин парфумерної композиції, з 3% парфумерної есенції № 1 і 30% парфумерної есенції № 2. У яких пропорціях необхідно взяти парфумерні есенції №1 і №2, щоб отримати потрібний парфум?

Професійний коментар. *Парфумерна есенція – рідина з маслянистою структурою, яку використовують у поєднанні зі спиртом і водою для досягнення потрібної концентрації та створення парфумів.*

Розв'язання. Нехай *x* – мл 3% есенції № 1, *y* – мл 30% есенції № 2, тоді *(x+y)* – мл 12 % композиції, $0{,}03x + 0{,}3y = 0{,}12(x + y)$, після перетворень отримаємо $x = 2y$. Відповідь: потрібно взяти в пропорції 1 до 2.

Прикладом задачі *професійного змісту,* у якій математичну модель не задано, є задача № 5 (типу B, рівень складності I). Зміст задачі відповідає наскрізній лінії «Підприємливість та фінансова грамотність». Математичною моделлю є лінійне рівняння.

Задача № 5. Для танцювального клубу спортивно-бальних танців «Діамант» потрібно зробити логотип. Керівництво колективу вирішує звернутися до креативної дизайн-студії, яка надала свій прайс.

Таблиця 21

Прайс компанії

Ціна логотипу	*Послуги*
4000 грн	Надається 2 варіанти логотипу; Допрацьовується обраний варіант
6000 грн	Надається 3 варіанти логотипу; Допрацьовується обраний варіант
8000 грн	Надається 5 варіантів логотипу на вибір; Допрацьовується обраний варіант
10000 грн	Надається готових 10 варіантів логотипу від декількох дизайнерів компанії

Відомо, що у колективі тренується 5 груп по 10 осіб у кожній, з групами працює два хореографи й до складу керівництва входить лише директор. Розрахувати, якою повинна бути вартість абонентської плати за місяць для кожного танцюриста, що тренується в клубі, щоб замовити окремо кожен з видів логотипу. Урахувати, що оренда приміщення й комунальні послуги разом становлять 4500 грн, податки 1000 грн, заробітна плата одного хореографа 3500 грн, а директора 17500. Зазначимо, що абонентська плата не повинна перевищувати 360 грн на місяць.

Розв'язання. Нехай x – абонентська плата за місяць, тоді розрахуємо для кожної з вартостей логотипу:

$4000 = 50 \cdot x - (4500 + 1000 + 2 \cdot 3500 + 17500)$, $4000 = 50 \cdot x - 30000$, $x = 680$,

$680 > 360$, можна отримати потрібну суму за півтора місяця

$6000 = 50 \cdot x - (4500 + 1000 + 2 \cdot 3500 + 17500)$, $x = 720$, $720 > 360$, можна отримати потрібну суму за два місяці.

$8000 = 50 \cdot x - (4500 + 1000 + 2 \cdot 3500 + 17500)$, $x = 760$, $760 > 360$, можна отримати потрібну суму за два з половиною місяці.

$10000 = 50 \cdot x - (4500 + 1000 + 2 \cdot 3500 + 17500)$, $x = 800$, $800 > 360$, можна отримати потрібну суму за два з половиною місяці.

Наведемо цикл задач, де спільною є математична модель $S = v \cdot t$. У задачах № 6–№ 9 змінено зміст і об'єкти, проте незмінною залишається модель для розв'язання.

Задача № 6. Перший фільтр очищає всю воду в басейні, працюючи самостійно, за *a* годин, а другий фільтр – за b годин. Скільки часу потрібно для очищення басейну обома фільтрами одночасно.

Розв'язання. Нехай V – об'єм води в басейні. За умовою задачі перший фільтр за 1 годину очищає $\frac{V}{a}$ літрів води, тоді другий $\frac{V}{b}$. Разом два фільтри за 1 годину очищають $\frac{V}{a} + \frac{V}{b}$ (швидкість очищення басейну обома фільтрами), тоді x – час очищення басейну обома фільтрами. Запишемо математичну модель задачі: $\left(\frac{V}{a} + \frac{V}{b}\right) \cdot x = V$. Відповідь: $x = \frac{a \cdot b}{a + b}$.

Задача № 7. (професійний, рівень I, тип А). Працівники відділу технічного контролю перевіряють виготовлений з яблук сік за такими критеріями: колір, смак, аромат. Готовий сік повинен бути прозорим, не кислим і мати коричневий відтінок та аромат яблука. Після чого сік розливають на лініях у пакети по 0,2 л й 1 л. Технологи на обох лініях розливу проконтролювали за зміну 73600 л. Після того, як технолог на «лінії розливу 0,2 л» підвищив продуктивність праці на 15%, а другий технолог – на 25%, разом вони за зміну проконтролювали розлив 91040 л, (очікувана математична модель $-\ 1{,}15\cdot x+1{,}25\cdot(73600-x)=91040$).

Задача № 8. Якщо на електричній плитці ввімкнено два нагрівні елементи, то вода в каструлі закипає за 30 хвилин. Після того, як вони пропрацювали разом 10 хвилин, перший ТЕН (потужністю 700 Вт) вимкнули. Через який час закипить вода в каструлі, якщо потужність другого ТЕНа 500 Вт.

Рис. 2. 13. Будова електричної плитки

Професійний коментар. Електрична одноконфорочна плитка з двома роздільними ТЕНами (потужностями: 700 Вт і 500 Вт), призначена для приготування їжі в домашніх умовах. Особливість її роботи полягає в тому, що нагрівні елементи можна вмикати або кожний окремо, або обидва паралельно до електричної мережі.

Розв'язання. Нехай Q – кількість теплоти, яка виділяється нагрівними елементами плитки за 30 хвилин, q – кількість теплоти, що виділяється за одну хвилину роботи першого нагрівного елемента. Тоді $\left(q+\frac{500}{700}q\right)$ – кількість теплоти, що виділяють обидва нагрівних елементи за хвилину. За 30 хвилин: $30\cdot\left(q+\frac{500}{700}q\right)=Q$, за 10 хвилин роботи разом: $Q-10\cdot\left(q+\frac{500}{700}q\right)=20\cdot\left(q+\frac{500}{700}q\right)$, тоді другий нагрівний елемент самостійно закінчить нагрівання за

$$\frac{20\cdot\left(q+\frac{500}{700}q\right)}{\frac{500}{700}q}=48\ хвилин.$$

Задача № 9. Фермер мав за певний час виорати поле площею 100 га. Попрацювавши над виконанням завдання чотири дні на тракторі Т150, він замінив його на трактор Landini (рис. 2.14), унаслідок чого підвищилася продуктивність праці на 75%, і вже за три дні до строку було виконано планове завдання. Скільки гектарів за день (оранка землі) може обробляти підприємець на сучасному тракторі?

Рис. 2. 14. Трактор Landini

Розв'язання. Нехай x – кількість га за день, яку мав виорювати трактор Т150, $n=\frac{100}{x}$ – кількість днів, за які виорано 100 га. Тоді за 4 дні виорано трактором Т150 – $4x$ (га), а на тракторі Landini продуктивність праці збільшилась на 75%, тому становитиме – $1{,}75\cdot x\cdot(n-4-3)$. Запишемо рівняння: $4x+1{,}75\cdot x\cdot\left(\frac{100}{x}-7\right)=100$. *Відповідь:* на сучасному тракторі Landini за день можна обробляти $15{,}909$ (га).

Лінійне рівняння є математичною моделлю задач № 10–№ 12. Задачі відрізняються за фабулою, але є спільними за рівнем складності й типом.

Задача № 10 (професійний, рівень І, тип В). На сайті готелю відбувається оцінювання його сервісу. Відомо, що 30% опитаних поставили оцінку 5 та 40% – оцінку 4, 1000 осіб поставила оцінку 3, а всі інші – 2. З'ясувати скільки користувачів оцінили сервіс готелю на сайті, якщо середня оцінка складає 3,95 балів.

Задача № 11 (професійний, рівень І, тип В). Переробка бджолами нектару на мед відбувається внаслідок його загущення (випаровування значної частини води). Відомо, що нектар містить 70% води, а мед – 15%.

З'ясувати, скільки нектару потрібно загустити бджолам, щоб пасічник міг отримати 3 л меду (густина меду $\rho = 1500\frac{кг}{м^3}$).

Задача № 12 (побутовий, рівень I, тип B). Протягом першої подорожі турист витратив 20% своїх заощаджень, а впродовж другої подорожі – 25% від суми, що залишилася. Після цього на картці залишилося на 200 євро більше, ніж було витрачено за обидві подорожі. Скільки грошей накопичив турист на подорожі.

Розглянемо для прикладу задачу *міжпредметного змісту,* де опорна математична модель $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$. Учні для розв'язання мають використати навчальний матеріал курсу фізики, тому задача належить до II рівня складності та типу C.

Задача № 13. Порівняти температуру води в чавунній (масою 100 кг) та акриловій (масою 20 кг) ваннах після наливання в них по 100 л води температурою 60°C. Питома теплоємність чавуну $540\frac{Дж}{кг \cdot °C}$, акрилу $1300\frac{Дж}{кг \cdot °C}$, температура а приміщенні 20°C. Втратами теплоти навколишнього середовища знехтувати.

Зазначимо, що модель для розв'язання цієї задачі має вигляд $t = \frac{c_ч \cdot m_ч \cdot t_2 + c_в \cdot m_в \cdot t_1}{c_в \cdot m_в + c_ч \cdot m_ч}$. Аналогічно можна створити задачі на використання рівняння теплового балансу як математичної моделі для інших видів матеріалів.

2.3.2. Квадратне рівняння як математична модель

Основні поняття теми: *квадратне рівняння, формула коренів квадратного рівняння, теорема Вієта, квадратний тричлен, розкладання квадратного тричлена на лінійні множники, рівняння, які зводяться до квадратних.*

Основні вміння учня: *знаходити корені квадратних рівнянь; розкладати квадратний тричлен на множники; знаходити корені рівнянь, що зводяться* *до квадратних; складати й розв’язувати квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до них, використовувати квадратні рівняння як засоби математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв’язувати на цій основі прикладні задачі.*

Метою уроків, на яких передбачено опрацювання теми «квадратне рівняння», є виробити в учнів навички математичного моделювання, навчити правильно виконувати всі його етапи, продемонструвати його застосування для розв’язування прикладних задач. У процесі складання математичної моделі так само, як під час створення інших моделей, ми не беремо до уваги несуттєві для конкретної задачі властивості, об’єкти, другорядні умови, що не впливають на розв’язок задачі. Задача, перекладена мовою математики вимагає роботи не з транспортними засобами, механізмами, сільськогосподарськими угіддями або земельними ділянками, а з числами, геометричними фігурами, формулами, рівняннями, тобто з математичними об’єктами.

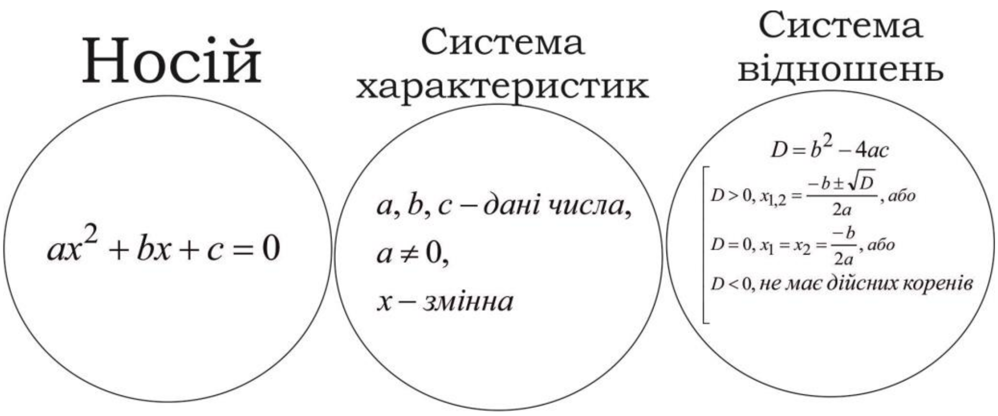


Рис. 2.15. Структура модельно-змістової частини моделі

Задачі *професійного змісту, типу В, рівень І,* у яких математичну модель не задано.

Задача № 14. На автостоянці розміром $20\,м \times 30\,м$ можуть паркуватися 24 автомобілі (згідно з нормативними параметрами). Завдяки знесенню старих господарських будівель з’явилася можливість збільшити площу автостоянки й паркувати 63 автомобілі. На яку однакову величину треба змінити і довжину, і ширину стоянки при тих самих нормативних параметрах.

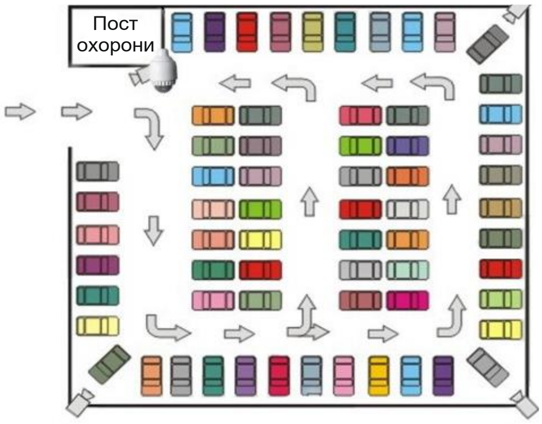


Рис. 2. 16. Автостоянка

Розв'язання. $20 \cdot 30 = 600$, $600 : 24 = 25\ м^2$ – припадає на один автомобіль.

$$\frac{1}{25} \cdot (20 + x) \cdot (30 + x) = 63,$$

$600 + 30 \cdot x + 20 \cdot x + x^2 = 1575$, $x^2 + 50 \cdot x - 975 = 0$.

$x_{1,2} = \dfrac{-50 \pm \sqrt{2500 + 4 \cdot 975}}{2}$, $x_1 = \dfrac{-50 + 80}{2} = 15$. *Відповідь.* Довжину і ширину стоянки потрібно збільшити на 15 м.

Наведена задача може бути шаблоном для створення інших, наприклад, висаджування рослин на земельній ділянці на вивільненому додатковому місці або додавання місць у кінотеатрі та ін.

Задача № 15. Компанія ПринтІмідж, що спеціалізується на виготовленні рекламної продукції, отримала завдання розмістити на білборді площею 280 м^2 рекламу магазину, яка складатиметься з двох однакових блоків у вигляді прямокутників по 9×12 м, розміщених по центру білборда (рис. 2.17). Знайти розміри рамки, якщо відомо, що вона має однакову ширину.

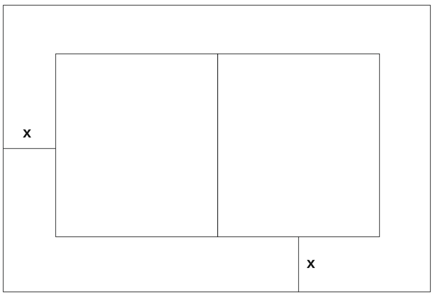


Рис. 2. 17. Білборд

Розв'язання. Нехай x – ширина рамки, тоді $(12 + 2\,x)$ – ширина білборда, $(18 + 2x)$ – його довжина, тоді, $(12 + 2\,x) \cdot (18 + 2x) = 280$,

$4x^2 + 60x - 64 = 0$, $x^2 + 15x - 16 = 0$, $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -16 \end{array}\right.$,

x_2 – (не задовольняє умову задачі). *Відповідь:* рамка має ширину 1 м.

Прикладні задачі з міжпредметним змістом вигідно вирізняються тим, що етап побудови математичної моделі розглянутого явища можна детально обговорювати. Окрім того, моделі міжпредметних задач є різноплановими.

Навіть у процесі вивчення того самого явища використовують цілий набір моделей. На жаль, у курсі математики (за чинними підручниками) таких прикладів мало. Дослідження отриманого розв’язку часто зводиться до підстановки його в модель або перевірки існування змісту знайденого розв’язку.

Побудувавши математичну модель, учні переважно, не досліджують результати узгодження відповіді з практикою. Часто залишають без уваги перетворення, що зводять модель до виду, який є найбільш зручним для практичного використання. Нераціональність подання обраної моделі впливає на наступні етапи розв’язання та дослідження розв’язків.

Задачі міжпредметного змісту, рівень II, тип С, математичну модель не задано. Використовуються знання з курсу фізики.

Задача № 16. М’яч кинули з балкона другого поверху ($h_0 = 4\ м$), він піднявся на висоту четвертого поверху ($h = 12\ м$). З якою швидкістю було кинуто м’яч і коли він упав на землю.

Відповідь: математична модель до задачі $\begin{cases} h = h_0 + v_0 \cdot t - \dfrac{g \cdot t^2}{2} \\ 0 = v_0 - g \cdot t \end{cases}$, $t = \dfrac{v_0}{g}$, $h = h_0 + \dfrac{v_0^{\ 2}}{2g}$.

Задача № 17. Під час турніру з хайдайвінгу спортсмен стрибнув з висоти 10 м. Якої горизонтально спрямованої швидкості він мав набути, щоб після розбігу пірнути на безпечній відстані (6 м) від скелі?

Рис. 2.18. Стрибок

Відповідь: математична модель до задачі (кінематичні рівняння) $\begin{cases} H = \dfrac{g \cdot t^2}{2} \\ L = v_0 \cdot t \end{cases}$, $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot H}{g}}$, $v_0 = L\sqrt{\dfrac{g}{2H}}$.

$v_0 = 6 \cdot \sqrt{\dfrac{9{,}8}{2 \cdot 10}} \approx 4{,}7\ ^{м}\!/_{с} = 16{,}9\ ^{км}\!/_{год}$.

Також важливо навести приклади задач, у яких не завжди можна отримати точні результати у процесі розв'язування, особливо коли йдеться про реальні об'єкти. Наприклад, розв'язання наступної задачі передбачає роботу з коренем з дискримінанта, який є наближеним значенням.

Задача № 18 (рівень ІІ). Потрібно виготовити пробний набір парфумів, що складається з трьох флаконів (5 мл, 25 мл, 50 мл), які мають форму зрізаного конуса. Висота кожного флакона – відповідно 30 мм, 60 мм, 90 мм. Дизайнер зазначив, що радіуси верхньої та нижньої основи флакона повинні бути у відношенні 1:2. Знайти ці радіуси.

Рис. 2. 19. Флакон парфумів

Розв'язання. Зауважимо, що учням можна запропонувати готову формулу для знаходження об'єму зрізаного конуса. $V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)$, $\frac{3V}{\pi \cdot h} = \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)$ − загальна модель.

Розрахуємо для 5 мл: $\frac{3 \cdot 5000}{\pi \cdot 30} = \left((2r)^2 + 2r \cdot r + r^2\right)$, $r^2 = \frac{500}{7\pi}$, $r_1 = -10\sqrt{\frac{5}{7\pi}}$ (не задовольняє умову задачі), $r_2 = 10\sqrt{\frac{5}{7\pi}} \approx 4{,}76$. Округлимо з надлишком, отримаємо: $r = 5\,мм, R = 10\,мм$.

Розрахуємо для 25 мл: $\frac{3 \cdot 25000}{\pi \cdot 60} = 7r^2$, $r^2 = \frac{750}{7\pi}$, $r \approx 5{,}84$. Округлимо з надлишком, отримаємо: $r = 6\,мм, R = 12\,мм$.

Розрахуємо для 50 мл: $\frac{3 \cdot 50000}{\pi \cdot 90} = 7r^2$, $r^2 = \frac{2500}{7\pi}$, $r \approx 10{,}66$. Округливши, отримаємо $r = 11\,мм, R = 22\,мм$.

Задачі, що передбачають дії, у процесі яких учні розв'язують дробово-раціональні рівняння, що зводяться до квадратних (професійного змісту, типу В, у яких математичну модель не задано) .

Задача № 19 (рівень II). «Кіровоградська нафтова компанія», що займається нафтопереробкою та виробляє альтернативні види пального, відправляє щомісяця в рівній кількості на кожну автозаправку 60 000 л моторного пального. З'ясувати, скільки автозаправок постачає нафтова компанія, якщо відомо, що у вихідні дні 4 заправки не працює, тому пальне, яке постачається, розподіляють між усіма працюючими заправками, при цьому кожна заправка збільшить свій запас пального на 4000 л.

Рис. 2. 20. Кіровоградська нафтова компанія

Розв'язання. Нехай *x* – загальна кількість автозаправок, які постачає пальним нафтова компанія, тоді (*x*-*4*) – кількість автозаправок, що працюють у вихідні. Тоді $\frac{60000}{x}$ – кількість пального, яке постачають на заправки в будні дні, а $\frac{60000}{x-4}+4000$ – кількість пального, що постачають на заправки у вихідні. Запишемо математичну модель до задачі.

$\frac{60000}{x}=\frac{60000}{x-4}+4000$, зазначимо, що $x \neq 0, x \neq 4$. Здійснивши перетворення, отримаємо квадратне рівняння: $x^2-4\cdot x-60=0$, $x_1=\frac{4-\sqrt{16+240}}{2}=-6<0$ (не задовольняє умову задачі, кількість заправок не може бути від'ємним числом), тому, $x_2=\frac{4+\sqrt{16+240}}{2}=\frac{20}{2}=10$.

Відповідь: загальна кількість автозаправок, що постачає нафтова компанія, становить 10.

Задача № 20 (рівень I). Два працівники «Нової Пошти», працюючи разом, прийняли поштові посилки за *t* днів. Якщо прийматиме замовлення лише перший, то він виконає половину замовлень, а потім другий зможе прийняти решту замовлень і все це за m днів. За скільки днів кожен працівник, може виконати всю роботу самостійно? Уважати, що робітники працюють з постійною продуктивністю.

Відповідь: нехай x – днів окремо виконає роботу перший працівник, тоді y – днів другий. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{t}$, і $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=m$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2m-x}=\frac{1}{t}$, перейдемо до квадратного рівняння $x^2-2\cdot m\cdot x+2\cdot m\cdot t=0$, зазначимо, що $m>2t$, тоді $x_1=m-\sqrt{m^2-2\cdot m\cdot t}$, днів або за $x_2=m+\sqrt{m^2-2\cdot m\cdot t}$.

Задача № 21. (рівень II). На виробництві срібних прикрас є два сплави срібла з родієм. Відомо, що вміст срібла в одному із цих сплавів на 40 % більший, ніж у другому. Сплавили шматок першого сплаву, що містить 5 кг срібла, із шматком другого сплаву, що містить 15 кг срібла, отримали сплав, що містить 30% срібла. Визначити відсотковий вміст срібла в кожному з початкових сплавів.

Відповідь: маса сплаву 15 кг, що складає 30% від маси кінцевого сплаву, тому, маса кінцевого сплаву $\frac{15}{30}\cdot 100\%=50\,кг$. Нехай x – маса першого сплаву, тоді другого – *(50–x)*. Запишемо рівняння $\frac{15}{50-x}-\frac{5}{x}=0{,}4$, урахувавши ($x\neq 0, x\neq 50$) перейдемо до квадратного рівняння $0{,}4\cdot x^2=250$. Маса першого сплаву 25 кг, срібло складає $\frac{15}{25}\cdot 100\%=60\%$, у другому сплаві вміст срібла 20%.

Задачі, у яких система рівнянь зводиться до квадратного рівняння, використовується теорема Вієта (професійного змісту, типу В, математичну модель не задано).

Задача № 22 (рівень I). Два тестувальники програмного забезпечення перевіряють заявлені програми. Перший тестувальник самостійно перевірив половину програм, а потім другий – решту. Усю роботу вони виконали за 25 год. Скільки годин потрібно кожному тестувальникові, щоб виконати всю роботу самостійно, якщо відомо, що, працюючи одночасно, вони перевірять усі програми за 12 год?

Розв'язання. Нехай x (год) – кількість годин, потрібні першому тестувальнику на виконання всієї роботи, а y (год) – кількість годин, потрібні другому тестувальнику.

За умовою задачі $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25$ – працювали по черзі, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=12$ – працювали разом.

Математичною моделлю до задачі є квадратне рівняння: $y^2-50\cdot y+600=0$. Запишемо теорему Вієта, $\begin{cases} y_1+y_2=600 \\ y_1\cdot y_2=50 \end{cases}$, тоді $y_1=20, y_2=30$.

Першому тестувальникові на самостійну перевірку програм потрібно 20 годин, а другому –30 годин.

Задача, у якій система рівнянь зводиться до квадратного рівняння, використовується формула дискримінанта (професійного змісту, типу С, математичну модель не задано).

Задача № 23. Фірма з надання послуг населенню володіє двома автомобілями, об'єм паливних баків яких становить 120 л. Коли обидва баки автомобілів стають порожніми, їх повна заправка коштує 2240 грн і 1400 грн, для більшого й меншого баків відповідно. Відомо, що автомобіль з баком більшого об'єму заправляють пальним, дорожчим на 2 грн за літр. Установити об'єм паливного бака кожного автомобіля й вартість 1 л пального для заправки кожного авто.

Розв'язання. Нехай x (л) – об'єм бака першого автомобіля, тоді y (л) – об'єм бака другого автомобіля. Позначимо p (грн) – вартість заправки дешевшим пальним, тоді заправка дорожчим – $p+2$ (грн).

$\begin{cases} x+y=120 \\ p\cdot x=1400 \\ (p+2)\cdot y=2240 \end{cases}$, з другого рівняння виразимо *р*, підставимо в третє і помножимо його на *х*, тоді, $(\frac{1400}{x}+2)\cdot y\cdot x=2240\cdot x$, урахуємо, що $y=120-x$. Використовуючи перетворення, отримаємо квадратне рівняння:

$x^2+1600\cdot x-84000=0$, $\sqrt{D_1}=\sqrt{724000}\approx 850$, тоді $x_1=-800+850=50$, $x_2<0$ (не задовольняє умову задачі). Об’єм паливного бака першого автомобіля – 50 л, другого автомобіля – 70 л. Перший автомобіль заправили пальним вартістю 28 грн за літр, а другий – 32 грн за літр.

2.3.3. Нерівності як математичні моделі

«Нерівності» – одна з основних змістових ліній шкільного курсу алгебри, має значний прикладний потенціал. Учні зазвичай уважають цю тему далекою від реального життя й сприймають її як абстрактне математичне поняття, тому ми пропонуємо систему задач, яка дозволить продемонструвати прикладні можливості цієї теми.

Основні поняття теми: *числова нерівність, основні властивості числових нерівностей, нерівність зі змінною, лінійні нерівності з однією змінною, числові проміжки, рівносильні нерівності.*

Основні проблеми, що виникають в учнів під час її вивчення:

– перехід від оперування числами до оперування змінними величинами;

– розуміння того, що означає розв’язати нерівність;

– застосування властивостей і здійснення перетворень у нерівностях;

– перевірка правильності розв’язку нерівності.

Цілі вивчення нерівностей:

– ознайомити учнів з інтегративним потенціалом математики в процесі засвоєння понять і властивостей нерівностей;

– продемонструвати реалізацію міжпредметних зв’язків математики на прикладі нерівностей;

– формувати загальні методи пізнання;

– виробляти обчислювальні навички;

– розвивати логічне мислення;

– систематизувати й закріпити матеріал;

– залучати до дослідницької діяльності.

Простежимо розвиток поняття «нерівність» упродовж курсів математики 5–6 класу й алгебри 7–9 класу.

Нерівності у 5 класі є опорними знаннями під час порівняння натуральних чисел, десяткових та звичайних дробів з однаковими знаменниками, причому нерівності дають змогу встановити результат порівняння багатоцифрових чисел. Особливо важливо застосовувати нерівності в процесі округлення десяткових дробів, що забезпечує в подальшому пропедевтику поняття подвійна нерівність. У 6 класі поняття модуля числа має безпосереднє відношення до поняття нерівність. На основі геометричної інтерпретації поняття модуль розв’язують нерівності виду $|x| < a, |x| > a, |x| \le a, |x| \ge a$. Поняття модуля є опорним під час порівняння від’ємних чисел: «Із двох від’ємних чисел меншим є те, модуль якого більший» [104]. Нерівності трапляються в навчальному матеріалі 6 класу в порівнянні раціональних чисел. У курсі алгебри 7 класу, тему «Нерівності» окремо не представлено, однак передбачено узагальнення вже здобутих початкових знань про нерівності. У процесі вивчення порівняння виразів зі змінними, формул скороченого множення й степенів з натуральним показником порівнюють з нулем різницю лівої й правої частини виразу. Вивчення поняття функції, а саме функції, яку задано на конкретних проміжках, що записуються у вигляді нерівностей. Нерівності у 8 класі використовують для порівняння дійсних, а також ірраціональних чисел. Дослідження функцій $y = x^2, y = \sqrt{x}$ передбачає використання нерівностей для опису області визначення й множини значень, проміжків зростання та спадання функції. Зв’язок нерівностей з поняттям квадратного рівняння полягає в дослідженні кількості його розв’язків залежно від дискримінанта ($D = 0, D > 0, D < 0$). Конкретне означення поняття числова нерівність у курсі алгебри подають у 9 класі. Розпочинають з основних означень поняття «число *a* більше за число *b*, якщо їхня різниця більша за нуль» і доведення нерівностей. Вивчають властивості числових нерівностей, нерівності зі змінними, числові проміжки, рівносильні нерівності та системи нерівностей. Квадратну нерівність засвоюють після вивчення поняття квадратична функція.

У результаті ознайомлення із задачами, які запропоновано в підручниках з алгебри 9 класу під час вивчення теми «Числові нерівності», можна стверджувати, що їх подано недостатню кількість, за змістом – міжпредметні, а саме зорієнтовані на знання з геометрії (площі трикутника, чотирикутника, п’ятикутника) [78], на знаходження найбільшого або найменшого значення для конкретної ситуації (Яку найбільшу відстань міг пропливти човен? Яка найбільша кількість вишень, якщо всього дерев не більше 120?) [102].

У підручнику [10], окрім задач на оцінку периметра та площі за відповідними сторонами фігури, є задачі побутового змісту, які використовують поняття подвійної нерівності. Наприклад, автори пропонують задачу щодо покращення подання числових характеристик, записаних на наклейці банки з томатної пасти, за допомогою подвійної нерівності.

З огляду на висновки, отримані у підрозділі 1.3, ми створили прикладні задачі до теми «Нерівності». У темі важливо продемонструвати учням застосування нерівностей у звичайних життєвих ситуаціях, тому вважаємо, що тему потрібно розпочинати із задач (типу В), у яких математичну модель не задано, але об’єкти й відношення задачі легко співвідносяться з математичними еквівалентами, тобто її не важко побудувати з опорю на умову задачі.

Задача № 1. Комунальні послуги за один місяць складають: 98 $кВт\cdot год$ електроенергії, 12 м^3 води і 80 м^3 газу. Розрахувати, скільки грошей залишиться в родини, якщо до сімейного бюджету за рахунок заробітної плати в місяць надходить не більше 10 000 грн.

Таблиця 22

Комунальні послуги

Послуга	***Вартість***
Електроенергія	E<100 кВт: 75 коп за кВт, 100<E<600 кВт: 1 грн 30 коп за кВт
Вода	11 грн за 1 м^3
Газ	7 грн за 1 м^3
Квартплата	82 грн за місяць

Додаткове завдання: Здійснити відповідні розрахунки й установити скільки грошей залишиться у вашої родини.

Розв'язання. $Електроенергія + Вода + Газ + Квартплата + Залишок \le 10000$.

$Залишок \le 10000 - (Електроенергія + Вода + Газ + Квартплата)$.

$Залишок \le 10000 - (кВт \cdot Тариф + м^3 \cdot Тариф + м^3 \cdot Тариф + Квартплата)$.

$Залишок \le 10000 - (98 \cdot 0{,}75 + 12 \cdot 11 + 80 \cdot 7 + 82)$,

$Залишок \le 9152{,}5$.

Відповідь: у родини залишиться не більше 9 тисяч 150 грн.

Задача № 2 (*побутовий зміст, рівень І, тип В)*. Родині протягом 5 років потрібно купити присадибну ділянку на суму 450000 грн. Яким повинен бути її щомісячний прибуток, якщо родина може відкладати не більше 15% щомісяця.

Відповідь: математична модель – $p \cdot 0{,}15 \le \dfrac{450000}{5 \cdot 12}$, прибуток родини на місяць повинен становити не менше, ніж 50000 грн.

Розглянемо задачу з теми «Властивості нерівностей», у якій математичну модель задано подвійною нерівністю, це задача типу А, міжпредметного змісту. Можна використовувати такі задачі під час пояснення поняття про числовий проміжок, оскільки тут на прикладі температурної характеристики зірок за заданими параметрами треба визначити тип заданої зірки.

Задача № 3. Відповідно до Гарвардської спектральної класифікації зір відомо, що залежно від температури зірка має певний візуальний колір. Установити, до якого типу належать найяскравіші зірки, які можна спостерігати з поверхні Землі: Сіріус з температурою 9940 К та Сонце з температурою поверхні 6000 К. З'ясувати візуальний колір невідомої зірки QWA з температурою $27000 \le 3t_{QWA} + 9000 \le 81000$, якщо відомі основні спектральні характеристики:

Таблиця 23

Візуальний колір	**Температура,** K
Синій	$T \ge 33000$
Блакитний	$10000 \le T \le 33000$
Біло-блакитний	$7500 \le T \le 10000$
Білий	$6000 \le T \le 7500$
Жовто-білий	$5200 \le T \le 6000$
Жовто-помаранчевий	$3700 \le T \le 5200$
Червоний	$T \le 3700$

Створити відповідні таблиці температурних характеристик за шкалою Цельсія та Фаренгейта.

Розв'язання. За умовою задачі $t_{Сіріуса} = 9940\,K$, з'ясуємо, яку з нерівностей в умові задачі задовольняє температура Сіріуса: $7500 \le 9940 \le 10000$ – біло-блакитний. Далі встановимо для температури Сонця $t_{Сонця} = 6000\,K$ – білий, жовто-білий.

Для визначення температурних характеристик невідомої зірки застосуємо до $27000 \le 3t_{QWA} + 9000 \le 81000$ властивості нерівностей та отримаємо: $\dfrac{26100}{3} \le t_{QWA} \le \dfrac{72000}{3}$, $8700 \le t_{QWA} \le 24000$.

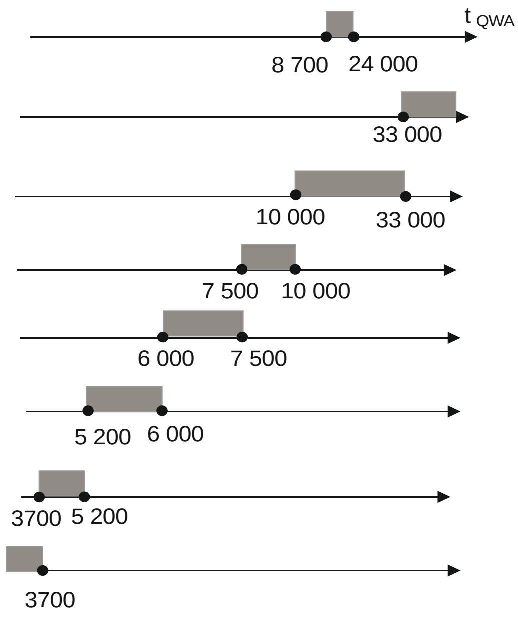


Рис. 2.21. Температурні характеристики

Установимо, до якого проміжку з таблиці 23 належать температурні характеристики зірки з температурою t_{QWA}, для цього побудуємо відповідні числові проміжки. З рисунка видно, що невідома зірка належить до зірок блакитного кольору.

З фізики відома модель переведення температури із шкали Кельвіна у шкалу Цельсія ($°\mathrm{C} = \mathrm{K} - 273{,}15$) та шкалу Фаренгейта ($°\mathrm{F} = 1{,}8 \cdot \mathrm{K} - 459{,}67$). Після виконання відповідних дій отримаємо таблицю 24.

Таблиця 24

Візуальний колір	**Характеристики,** °C	**Характеристики,** °F
Синій	$T \geq 32726{,}85$	$T \geq 58940{,}33$
Блакитний	$9726{,}85 \leq T \leq 32726{,}85$	$17540{,}33 \leq T \leq 58940{,}33$
Біло-блакитний	$7226{,}85 \leq T \leq 9726{,}85$	$13040{,}33 \leq T \leq 17540{,}33$
Білий	$5726{,}85 \leq T \leq 7226{,}85$	$10340{,}33 \leq T \leq 13040{,}33$
Жовто-білий	$4926{,}85 \leq T \leq 5726{,}85$	$8900{,}33 \leq T \leq 10340{,}33$
Жовто-помаранчевий	$3426{,}85 \leq T \leq 4926{,}85$	$6200{,}33 \leq T \leq 8900{,}33$
Червоний	$T \leq 3426{,}85$	$T \leq 6200{,}33$

Поняття подвійної нерівності в підручниках з математики найчастіше подано в теоретичному трактуванні. У темі, що розкриває це поняття немає завдань прикладного спрямування, навпаки, у ній подано вправи на відпрацювання теоретичних умінь і навичок. Задача № 4 дає учням уявлення про те, що систему подвійних нерівностей можна використати для опису нафтового забруднення й сорбенту. Задача має екологічний зміст.

Задача № 4. Унаслідок витоку нафти з танкера на поверхні моря утворилася нафтова пляма. Для усунення плями екологи вирішили використати сорбенти у вигляді матів, які вбирають нафту у відношенні 1:1. Відомо, що один мат-сорбент має такі характеристики: ширина в межах від 0,5 до 1 м, довжина від 0,5 до 1 м, товщина від 0,5 до 1 м. З’ясувати, скільки потрібно таких сорбентів для усунення нафтової плями шириною від 500 до 600 м, довжиною від 600 до 700 м, товщиною від 0,01 до 0,03 м.

Професійний коментар. Сорбент – тверде тіло, що вибірково поглинає з навколишнього середовища речовини.

Розв’язання. Запишемо дані по сорбенту у вигляді системи умов.

Нехай x – ширина сорбенту, y – довжина сорбенту, z – товщина сорбенту.

$$\begin{cases} 0{,}5 \le x \le 1 \\ 0{,}5 \le y \le 1 \\ 0{,}5 \le z \le 1 \end{cases}$$ – характеристики одного мату-сорбенту,

$$\begin{cases} 500 \le x_n \le 600 \\ 600 \le y_n \le 700 \\ 0{,}01 \le z_n \le 0{,}03 \end{cases}$$ – характеристики нафтової плями

Тоді для розв’язання задачі потрібно знайти об’єми нафтової плями й сорбенту:

Об’єм нафтової плями – $3000 \le V_n \le 12600$

Об’єм одного сорбенту – $0{,}125 \le V \le 1$

Знайдемо відношення об’ємів – $\frac{3000}{1} \le \frac{V_n}{V} \le \frac{12600}{0{,}125}$.

Висновок: мінімальна кількість сорбентів 3 000 штук, максимальна кількість сорбентів 100 800 штук.

Подвійні нерівності трапляються і також в описі складу вітамінів у продуктах харчування. Продемонструємо це на прикладі відкритої задачі.

Задача № 5. Визначити вміст вітаміну С у салаті двох видів. З’ясувати, який із салатів на цілий день забезпечить вітаміном С родину (дружину віком 35 років, чоловіка віком 61 років, дівчинку 15 років). Розрахувати вміст кожного компонента салату в міліграмах для кожного члена родини, якщо: 1) жінка вживає фруктовий салат, у складі якого – 100 г полуниці, 100 г банана, 50 г меду, 50 г ананаса; 2) чоловік уживає овочевий салат, вміст якого – 100 г капусти, 50 г цибулі, 100 г помідорів, 100 г огірків; 3) дівчинка вживає два види салатів овочевий (50 г капусти, 50 г огірків, 50 г цибулі) і фруктовий (полуниця 50 г, банан 100 г, мед 20 г).

Таблиця 25

Вміст вітаміну С у продуктах

Фруктовий салат		*Овочевий салат*	
Продукт	***Вміст вітаміну С у 100 г продукту***	***Продукт***	***Вміст вітаміну С у 100 г продукту***
ананас консервований	9 ± 2 мг	помідор	$8 \pm 0{,}5$ мг

полуниця	60 ± 5 мг	капуста	45 ± 5 мг
банан	23 ± 5 мг	цибуля	$9 \pm 0{,}5$ мг
мед	$4 \pm 0{,}3$ мг	огірок	$8 \pm 0{,}5$ мг

Таблиця 26

Добова потреба населення України у вітаміні С

Вікові групи	С, мг
14 – 17 років (хлопці)	80
14 – 17 років (дівчата)	75
Чоловіки 18 – 60 років	80
Жінки 18 – 60 років	70
Чоловіки 60 – 74 роки	100
Жінки 60 – 74 роки	100

Додаткове завдання: *Здійснити відповідні розрахунки для вашої родини.*

Розв'язання. Вирази виду $m_а = 9 \pm 2$ мг можна представити у вигляді $7 \le m_а \le 11$. Запис ± 2 означає, що значення вмісту вітаміну С у продукті може відрізнятися від 9 у бік між значеннями $+2$ або -2.

Для розрахунку раціону жінки потрібно знайти суму нерівностей: $\frac{7}{2} \le \frac{m_а}{2} \le \frac{11}{2}$, $55 \le m_п \le 65$, $18 \le m_б \le 28$, $\frac{3{,}7}{2} \le \frac{m_м}{2} \le \frac{4{,}3}{2}$,

$$3{,}5 + 55 + 18 + 1{,}85 \le \frac{m_а}{2} + m_п + m_б + \frac{m_м}{2} \le 5{,}5 + 65 + 28 + 2{,}15,$$

$$3{,}5 + 55 + 18 + 1{,}85 \le \frac{m_а}{2} + m_п + m_б + \frac{m_м}{2} \le 5{,}5 + 65 + 28 + 2{,}15,$$

$78{,}35 \le \frac{m_а}{2} + m_п + m_б + \frac{m_м}{2} \le 100{,}65$. Порівнюємо межі нерівності з нормою вживання вітаміну С згідно з таблицею 25: для жінки відповідного віку на день вона становить 70 мг. Отже, жінка вживає вітаміну С більше за норму.

Астрономічний матеріал також багатий на приклади, за якими можна продемонструвати застосування подвійних нерівностей під час наближених обчислень. Попередньо можна нагадати форми запису наближених обчислень у вигляді подвійних нерівностей.

Задача № 6 (*міжпредметний зміст, рівень I, тип B*). Відстань між Юпітером і Землею коливається від 588 до 967 млн км, а відстань до Меркурія від Землі змінюється від 77,3 до 221,9 млн км. Між Землею й Марсом опиняються на мінімальній відстань буває від 56 до 401 млн км, а відстань від Венери до Землі змінюється в межах від 38 до 261 млн км. Записати ці відомості у вигляді умовної й подвійної нерівності та з використанням знака модуля. Яка з наведених відстаней буде точнішою?

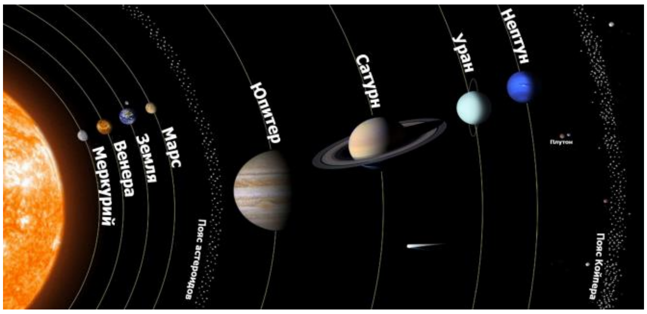


Рис. 2. 22. Сонячна система

Розв'язання. Для Юпітера $588 < Jupiter\_Earth < 967$,

$$Jupiter\_Earth = 777{,}5 \pm \frac{967-588}{2}, \qquad Jupiter\_Earth = 777{,}5 \pm 189{,}5$$

$$\left|Jupiter\_Earth - 777{,}5\right| = 189{,}5.$$

Методичне значення задач № 7 та № 8 полягає в застосуванні властивостей числових нерівностей під час розв'язування прикладних задач, що сприяє посиленню пізнавального інтересу учнів, віддзеркаленню міжпредметних зв'язків, доводить практичну значущість здобутих у темі знань. У задачах об'єкти й відношення співвідносяться з відповідними математичним об'єктами (задача типу C), зміст задач є побутовим, використовуються знання з курсу фізики.

Задача № 7. У дитячому таборі проводять конкурс цікавих і корисних засобів, які потрібно виготовити з використаних матеріалів. У команди виникла ідея зробити пліт для плавання озером. Матеріалом для плоту обрали пластикові пляшки об'ємом 1,5 л. Скільки потрібно пластикових пляшок масою 36 – 42 грами для виготовлення плоту, який може втримати дитину масою 45 – 50 кг.


Рис. 2. 23 . Пліт

Розв'язання. Нехай $m_п$ – маса пляшки, $m_л$ – маса людини.

Пригадаємо, що число в стандартному вигляді має запис: $a \cdot 10^n$, де $0 < a < 9$, $n \in N$. Запишемо $1гр = 10^{-3} кг$, тому маси пляшки і людини відповідно до умови задачі будуть виражені такими нерівностями: $36 \cdot 10^{-3} \le m_п \le 42 \cdot 10^{-3}$, $45 \le m_л \le 50$. Урахуємо, що $1л = 10^{-3} м^3$.

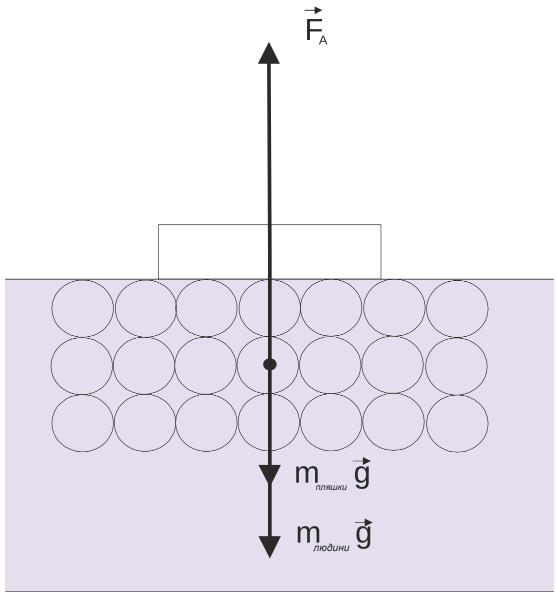


Рис. 2. 24. Модель плоту

З курсу фізики відомо, що для плавання плоту з людиною на поверхні води потрібне виконання умови: $F_A \ge m_л \cdot g + m_п \cdot N \cdot g$, $F_A = \rho_в \cdot N \cdot V_0 \cdot g$.

F_A – сила Архімеда, g – прискорення вільного падіння, V_0 – об'єм однієї пляшки ($1,5л = 1,5 \cdot 10^{-3} м^3$), $\rho_в$ – густина води ($1000 \frac{кг}{м^3}$), N – кількість пляшок.

$$\rho_в \cdot N \cdot V_0 \cdot g \ge m_л \cdot g + m_п \cdot N \cdot g$$

$$\rho_в \cdot N \cdot V_0 \cdot g - m_п \cdot N \cdot g \ge m_л \cdot g$$

$$N \cdot (\rho_в \cdot V_0 \cdot g - m_п \cdot g) \ge m_л \cdot g$$

Користуючись властивостями нерівностей отримаємо: $N \ge \dfrac{m_л}{\rho_в \cdot V_0 - m_п}$, оцінимо вираз у правій частині нерівності.

Відповідно до умови задачі $45 \le m_л \le 50$, $36 \cdot 10^{-3} \le m_п \le 42 \cdot 10^{-3}$, $V_0 = 1,5 \cdot 10^{-3} м^3$, $\rho_в = 1000 = 10^3 \dfrac{кг}{м^3}$.

Для оцінки частки $\dfrac{m_л}{\rho_в \cdot V_0 - m_п}$ подамо її у вигляді добутку $m_л \cdot \dfrac{1}{\rho_в \cdot V_0 - m_п}$. Здійснюємо оцінку виразу $\dfrac{1}{\rho_в \cdot V_0 - m_п}$.

Якщо $36 \cdot 10^{-3} \le m_п \le 42 \cdot 10^{-3}$, то для отримання значення виразу $-m_п$ потрібно помножити на *(-1)* усі частини нерівності, маємо $-42 \cdot 10^{-3} \le -m_п \le -36 \cdot 10^{-3}$. Урахуємо, що $\rho_в \cdot V_0 = 1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 1,5кг$ і до всіх частин нерівності додамо отримане число $1{,}5 - 42 \cdot 10^{-3} \le \rho_в \cdot V_0 - m_п \le 1{,}5 - 35 \cdot 10^{-3}$, $1{,}458 \le \rho_в \cdot V_0 - m_п \le 1{,}464$. Далі вираз $\frac{1}{\rho_в \cdot V_0 - m_п}$ буде в межах: $\frac{1}{1{,}464} \ge \frac{1}{\rho_в \cdot V_0 - m_п} \ge \frac{1}{1{,}458}$, $\frac{1}{1{,}458} \le \frac{1}{\rho_в \cdot V_0 - m_п} \le \frac{1}{1{,}464}$. За властивістю про почленне множення нерівностей матимемо: $45 \cdot \frac{1}{1{,}458} \le m_л \cdot \frac{1}{\rho_в \cdot V_0 - m_п} \le 50 \cdot \frac{1}{1{,}464}$, $30{,}73 \le \frac{m_л}{\rho_в \cdot V_0 - m_п} \le 34{,}29$. *Відповідь:* потрібно взяти від 30 до 35 пляшок.

Задача № 8. Свято небесних ліхтариків популярне в багатьох країнах Сходу зокрема в Китаї, Таїланді, Японії, Тайвані, однак у кожній країні воно має своє значення: у Тайвані вірять, що разом з ліхтарем від них відлітають усі негаразди, у Китаї цей день знаменує закінчення свята весни й традиційного нового року.

Рис. 2.25. Китайський ліхтарик

Учні вирішили влаштувати фестиваль ліхтарів, не від’їжджаючи до інших країн. Розрахувати масу свічки, з якою ліхтар, злетівши, може знаходитись у польоті якнайдовше. Матеріалом для кулі є пакет для сміття об’ємом 50 л.

Розв’язання. У лабораторних умовах з’ясували масу одного пакета на 50 л, вона становить 11,705 г. З курсу фізики відомо, що

F_A – сила Архімеда,

g – прискорення вільного падіння,

$m_{св}$ – маса свічки, $m_к$ – маса кулі,

$\rho_п$ – густина повітря ($1{,}29\,{}^{кг}/_{м^3}$),

$V_к$ – об’єм одного пакета.

$F_A > m_{св} \cdot g + m_к \cdot g$, $\rho_п \cdot g \cdot V_к > m_{св} \cdot g + m_к \cdot g$

$m_{св} < \rho_п \cdot V_к - m_к$

$$m_{св} < 1{,}29 \cdot 50 \cdot 10^{-3} - 11{,}705 \cdot 10^{-3},\ m_{св} < 52{,}795 \cdot 10^{-3}г,\ m_{св} \approx 50г.$$

Відповідь: маса свічки повинна бути не більше за 50 г.

Вивчення теми «Системи лінійних нерівностей» доцільно розпочати з таких понять: числовий проміжок, об'єднання й переріз числових проміжків. Після ознайомлення учнів з основними теоретичними аспектами теми важливо показати також її прикладну реалізацію. Для прикладу демонструємо задачі, які можуть бути пропедевтичними для з'ясування, що буде перерізом та об'єднанням множин. Учителеві потрібно акцентувати увагу учнів на тому, ми що по суті, кожного дня ми використовуємо такі операції, проте несвідомо. Наприклад, обираючи, ми порівнюємо об'єкти, що беруть участь у процесі вибору. Для цього нам потрібно встановити всі їхні відмінні й спільні ознаки, продемонструємо це на прикладі задачі.

Задача № 9. У кожному з вітамінних комплексів Multi-tabs і Vitrum (див. рис. 2.26) передбачено свій склад вітамінів. З'ясувати: а) які вітаміни є в комплексах Multi-tabs або Vitrum; б) які мінерали є в комплексах Multi-tabs і Vitrum?

Multi-tabs

СКЛАД КОМПЛЕКСУ: 13 вітамінів, 9 мінералів*

Вітамін А 25% бета-каротину	800 мкг	Біотин	62,5 мкг
Вітамін Д$_3$	5 мкг	Вітамін К	30 мкг
Вітамін Е	15 мг	Магній	100 мг
Вітамін С	100 мг	Залізо	5 мг
Вітамін В1	1,4 мг	Цинк	5 мг
Вітамін В2	1,75 мг	Мідь	0,5 мг
Вітамін В6	2 мг	Марганець	2 мг
Вітамін В12	2,5 мкг	Хром	40 мкг
Ніацин	20 мг	Селен	30 мкг
Фолієвая кислота	200 мкг	Йод	100 мк
Пантотеновая кислота	7,5 мг	Молібден	50 мкг

*на 1 таблетку

Vitrum

Вітамін А	1,72 мг	Кальцій	162,0 мг
Вітамін B_1	1,5 мг	Магній	100,0 мг
Вітамін B_2	1,7 мг	Калій	40,0 мг
Вітамін B_3	20,0 мг	Хлор	36,3 мг
Вітамін B_6	2,0 мг	Фосфор	125,0 мг
Вітамін B_{12}	6,0 мкг	Залізо	16,0 мг
Вітамін D_3	10,0 мкг	Мідь	2,0 мг
Вітамін E	20,1 мг	Цинк	15,0 мг
Вітамін C	60,0 мг	Марганець	2,5 мг
Вітамін K_1	0,025 мг	Селен	25,0 мкг
Пантотенова кислота	10,0 мг	Хром	25,0 мкг
Фолієва кислота	400 мкг	Молібден	25,0 мкг
Біотин	30,0 мкг	Ванадій	10,0 мкг
Йод	150,0 мкг		

Рис. 2. 26. Вітамінні комплекси Multi-tabs і Vitrum

Для виконання завдання потрібно здійснити переріз та об'єднання відповідних множин.

Також можна запропонувати учням розв'язати наступну задачу, що на практиці виявляється досить часто, але може відрізнятися за змістом.

Задач № 10. Нехай відомо, що А={301, 302, 303, 305, 312, 313, 501, 502, 505,509а, 509б} – множина шкільних аудиторій, які за розкладом займають 9-ті й 10-ті класи, В={303, 305, 311, 501, 503} – множина аудиторій, які за розкладом займають 11-ті класи. З’ясувати: а) які аудиторії є в освітньому закладі, б) чи будуть за такого розподілення накладки в шкільному розкладі?

Пропонуємо вчителям запланувати для учнів завдання створити схожі задачі самостійно. Можна організувати це під час навчальної практики [додаток З] або роботи над проєктом (наприклад, дії над числовими множинами у професійній діяльності).

Учням досить складно самостійно уявити ситуацію, у якій математичною моделлю задачі є система лінійних нерівностей, а в учителя не завжди в процесі вивчення теми є час для самостійного створення такого методичного матеріалу, тому доцільно застосувати такі задачі міжпредметного змісту.

Задача № 11 (*типу В, рівень ІІ, у якій математичну модель не задано, її потрібно створити).* Стародавні скіфські жінки вірили в те, що дзеркала не лише дають змогу милуватися власною зовнішністю, а й відштовхують від власниці злих духів. Установити межі площ кожного з двох скіфських дзеркал, якщо разом діаметри першого і другого дзеркала обмежені 70 – 72 см і встановлено, що радіус другого дзеркала в 3 – 4 рази менший за радіус першого (скіфські дзеркала були округлої форми рис. 2.27).

Рис. 2.27. Скіфські дзеркала

Розв’язання. Нехай R – радіус першого дзеркала, а r – радіус другого, тоді $2\cdot(R+r)$ – сума діаметрів дзеркал, що знаходиться в межах від 70 до 72 см. Відповідно до умови задачі радіус другого дзеркала в 3 – 4 рази менший за радіус першого, тому $3r \le R \le 4r$.

Складаємо систему подвійних нерівностей: $\begin{cases} 35 \le R + r \le 36 \\ 3r \le R \le 4r \end{cases}$. Оцінимо нерівності системи методом меж. Отримаємо $35 - 4r \le R \le 36 - 3r$, $\begin{cases} 35 - 4r \le r \\ 36 - 3r \ge r \end{cases}$, $7 \le r \le 9$, $26 \le R \le 29$.

Відповідь: радіус першого дзеркала в межах від 26 до 29 см, радіус другого дзеркала – від 7 до 9 см.

Задача № 12 (типу С, рівень ІІ, у якій математичну модель не задано, її треба створити). Акрилова ванна масою 24 кг містить 100 л води за температури 20°С. Скільки літрів води температурою 70°С, потрібно додати до ванни, щоб отримати воду температурою не менше 35°С і не більше 40°С. Питома теплоємність акрилу складає 1300 $\frac{Дж}{кг \cdot °C}$.

Відповідь: опорна математична модель – $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$.

$$\begin{cases} c_в \cdot m_1(t' - t_1) + c_а \cdot m_а(t' - t_1) \le c_в \cdot m_2(t_2 - t') \\ c_в \cdot m_1(t'' - t_1) + c_а \cdot m_а(t'' - t_1) \ge c_в \cdot m_2(t_2 - t'') \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4200 \cdot 100 \cdot (35 - 20) + 1300 \cdot 24(35 - 20) \le 4200 \cdot m_2(70 - 35) \\ 4200 \cdot 100 \cdot (40 - 20) + 1300 \cdot 24 \cdot (40 - 20) \ge 4200 \cdot m_2 \cdot (70 - 40) \end{cases};$$

$$\begin{cases} m_2 \ge 46\frac{2}{49} \\ m_2 \le 71\frac{13}{21} \end{cases}, \; m_2 \in [46\frac{2}{49}; 71\frac{13}{21}].$$

Задача має професійний зміст, рівень І, тип А, центральне поняття – система лінійних нерівностей.

Задача № 13. Заводи «Ельворті» й «Гідросила» є конкурентами на ринку товарів, відповідно кожен за добу виготовляє певну кількість насосів. «Ельворті» виготовляє не більше 900 насосів за добу, а «Гідросила» –на 85% насосів більше за «Ельворті». Завод «Гідросила» здійснив модернізацію й збільшив виготовлення насосів на 30% від кількості, що випускається за добу на заводі «Ельворті», і почав випускати більше 1000 агрегатів за добу. Скільки насосів за добу випускав кожен завод до модернізації заводу «Гідросила»?

Відповідь: $\begin{cases} x \le 900 \\ \frac{85}{100} \cdot x + \frac{30}{100} \cdot x > 1000 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 900 \\ x > 869\frac{13}{23} \end{cases}$, отримаємо $869\frac{13}{23} < x \le 900$, числа $\frac{85}{100} \cdot x$ і $\frac{30}{100} \cdot x$ повинні бути цілими, тому 880 і 900. Звідси: 1) завод «Ельворті» випускав 880 насосів, а «Гідросила» $\frac{85}{100} \cdot 880 = 748$; 2) завод «Ельворті» випускав 900 насосів, а «Гідросила» $\frac{85}{100} \cdot 900 = 765$.

Після ознайомлення учнів з попередніми задачами можна зосередити їхню увагу на більш складних. Прикладом може бути задача біологічного змісту, яку ми зарахували до типу С (об'єкти й відношення задачі явно не виокремлено або їхні математичні еквіваленти невідомі учням). Вона схожа на задачі лінійного програмування, її умову можна зосереджувати на оптимальному маршруті транспортних перевезень або оптимальній жирності молока.

Задача № 14. Розрахувати оптимальний харчовий раціон, який забезпечить максимальну поживність, якщо є два види продуктів А – 2100 ккал і С – 1800 ккал та дані таблиці.

Таблиця 27

Харчовий раціон

Види продуктів	Кількість поживних речовин в одиниці продукту		Потрібний мінімум поживних властивостей
	І вид поживних речовин	ІІ вид поживних речовин	
Продукт А	10	30	2100
Продукт С	40	20	1800
Раціон	X	Y	
Поживність продукту	40	60	

Розв'язання. Нехай раціон складається з x поживних речовин І виду та y поживних речовин ІІ виду, тоді функція мети має вигляд – $F(x; y) = 40 \cdot x + 60 \cdot y$ (1).

З таблиці запишемо систему умов:

$$\begin{cases} 10\cdot x+30\cdot y\le 2100 \\ 40\cdot x+20\cdot y\le 1800 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad (2), \quad \begin{cases} x+3y\le 210 \\ 2x+y\le 90 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y\le 70-\dfrac{x}{3} \\ y\le 90-2x \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad (3).$$

Відповідно до підходів методу лінійного програмування побудуємо графіки зазначених функцій й розв’яжемо відповідні нерівності (3).

$$y=70-\frac{x}{3}$$

X	30	0
Y	60	70

$$y=90-2x$$

X	30	0
Y	30	90

Точка перетину $90-2x=70-\dfrac{x}{3}$, $y=66, x=12$.

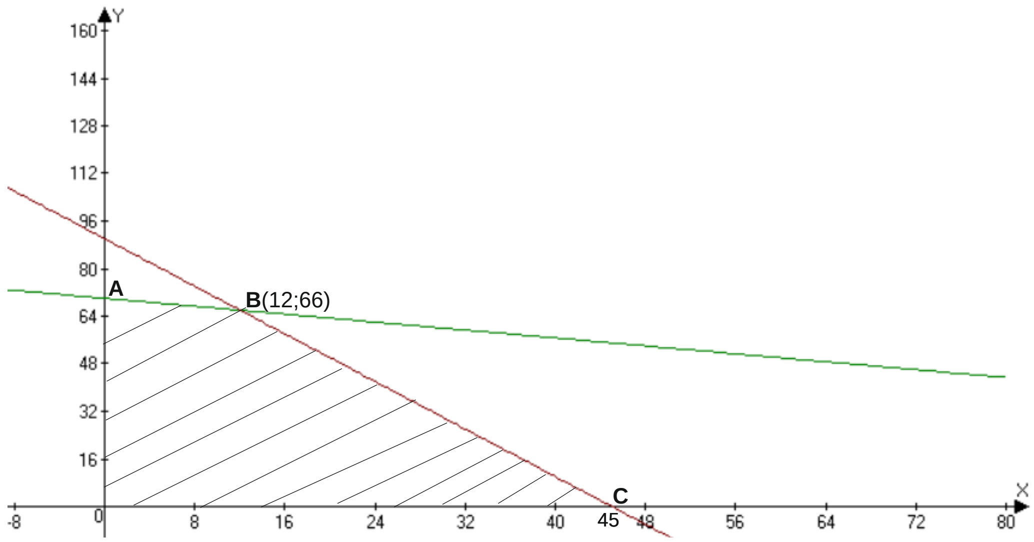


Рис. 2.28. Розв’язок системи нерівностей

Розв’язком є область, утворена вершинами чотирикутника OABC. Знайдемо значення поживності раціону за допомогою функції мети:

Для точки O(0;0) $F(0;0)=40\cdot 0+60\cdot 0=0$, точки A(0;70) $F(0;70)=40\cdot 0+60\cdot 70=420$, точки C(45;0) $F(45;0)=40\cdot 45+60\cdot 0=1800$, точки B(12;66) $F(12;66)=40\cdot 12+60\cdot 66=4440$. Порівнявши отримані значення в точках O, A, B, C, можна зробити висновок, що оптимальним значенням раціону є вершина B(12;66). Для максимальної поживності раціону 4440 ккал потрібно взяти 12 поживних речовин I виду, 66 поживних речовин II виду.

Ми розглянули особливості методики формування вмінь математичного моделювання в процесі вивчення змістової лінії «Рівняння та нерівності». Задачі розподілено в залежності від математичної моделі (лінійне чи квадратне рівняння, нерівність), тому їх можна легко впровадити в навчальний процес.

Отже, під час розв'язування запропонованих задач учні навчаються: аналізувати результати своєї діяльності; розуміти й чітко виконувати дії, потрібні для розв'язання прикладної задачі. Застосування підібраних відповідним чином прикладних задач дозволяє розширювати уявлення учнів про рівняння, нерівності та їх системи як математичні моделі; здійснювати перенесення вмінь та навичок, сформованих в учнів на уроках математики, на дослідження реальних явищ.

2.4. Методика використання системи задач з теми «Функції та їх графіки» для формування умінь математичного моделювання

Розуміння поняття функціональної залежності є визначальним у вивченні математики та основним елементом курсу алгебри, підґрунтям для подальшого осмислення розділів математики загалом. Поняття функції посідає своє місце в системі природничо-математичних наук, оскільки для усвідомлення реальних процесів і явищ, що вивчаються в суміжних галузях, переважно застосовують функціональні залежності. Наприклад, поняття квадратична функція використовується для опису рівноприскореного прямолінійного руху, а із застосуванням лінійної функції описують залежність між температурою повітря й конкретною годиною дня, або деформацію (стиск та розтяг) тіла за певних змін температури, а обернену пропорційність демонструють на прикладі залежності сили струму від опору провідника за умови, що напруга є сталою.

Під час вивчення цієї змістової лінії важливо продемонструвати, що кожна функція – це математична модель реального процесу чи явища, яка описує його з використанням математичної термінології, символіки, формул, причому та сама функція може описувати декілька процесів.

Прикладні задачі, підібрані на основі теоретичного матеріалу розкривають не лише наукове, але й практичне значення функціональної лінії, що сприяє активному мисленню учнів і розвитку пізнавального інтересу.

У навчально-методичній літературі є два підходи до визначення поняття функція: *класичний*, який передбачає визначення функції як закону, змінної величини або залежності між двома змінними величинами; *сучасний* підхід (ґрунтується на теоретико-множинному підході), за якого функцію визначають через відповідність, правило, відображення, залежність між змінними, множину упорядкованих пар чисел.

У підручниках [103, 95, 168] подано таке означення функції: «*правило, за яким кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної»,* що потрібно вводити після прикладів функціональних залежностей одних змінних від інших.

У курсі математики функціональну пропедевтику передбачено реалізувати в процесі вивчення: буквених виразів, текстових задач, розв'язування рівнянь, у роботі над формулами (під час складання формул, їх застосування та виконання обчислень). У процесі роботи з формулами учні визначають, від скількох величин залежить величина в лівій частині рівності. Наведемо приклад такої задачі.

Задача № 1. Для балона з газом виконується формула $m = m_0 + \rho \cdot V$, за якою можна визначити його масу. Маса пустого балона $m_0 = 9{,}5\,кг$, густина газу $\rho = 0{,}8\,\frac{кг}{м^3}$. Визначити масу балона з газом, якщо відомо, що об'єм газу дорівнює $V = 3\,м^3$.

У цій задачі учні використовують уже відому формулу для визначення маси тіла $m = \rho \cdot V$. Аналіз описаного явища демонструє, що зміна одних величин зумовлює зміну інших, у прикладі визначення маси балона з газом (за сталої маси балона й густини газу), зміна об’єму спричиняє зміну маси балона з газом. На основі цього учні до усвідомлюють поняття «змінні незалежні» і «змінні залежні».

Після цього можна запропонувати систему задач міжпредметного змісту, яка демонструватиме залежності між різними величинами. Наприклад, можна створити задачі за такими моделями:

– $S = v \cdot t$ (за зміни часу й сталої швидкості змінюється шлях);
– $S = \pi \cdot r^2$ (зміна радіусу впливає на зміну довжини кола);
– $V = a^3$ (об’єм куба змінюється залежно від значень сторони);
– $K = \frac{42,3}{100} \cdot m$ (калорійність молока).

У моделях можна помітити, що одні з них описують лінійну залежність, інші – квадратичну, кубічну, тому далі розглянемо окремо системи задач до різних видів функцій. Продемонструємо розгортання змістової лінії «Функції та їх графіки» впродовж курсу алгебри 7 – 9 класів.

Рис. 2.29. Функціональні залежності

Систему задач розроблено відповідно до основних понять (рис. 2.29), вивчення яких передбачено у функціональній лінії, а вміння, потрібні учням для роботи над задачами системи представлено у таблиці 28.

Таблиця 28

Змістова лінія «Функції та їх графіки»

Знаково-символьні моделі	*Образні моделі*
− уміння визначати значення функції залежно від аргументу; − уміння знайти значення аргументу за заданим значенням функції; − уміння визначати за формулою вид функції; − уміння задати формулою функцію; − уміння будувати функцію, обернену до даної; − уміння, потрібні для дослідження функції.	− уміння будувати графіки функцій; − уміння визначати за графіком вид функції; − уміння зчитувати інформацію про властивості функції за побудованим графіком.

Розглянемо задачу, доступну для семикласників, оскільки вони вивчили тему «Функція та її графік». У задачі математичну модель задано, вона є образною, учні досліджують її відповідно до поставлених в умові завдань.

Задача № 2. На рис. 2.30 зображено графік залежності інтенсивності руху на проїжджій магістралі міста (автомобілі/годину) від часу доби t (год). Установити: а) у який час доби інтенсивність руху була максимальною? б) у який час доби інтенсивність руху автомобілів складала 70% від максимальної? в) визначити окремо проміжки часу, на яких інтенсивність руху автомобілів зростає.

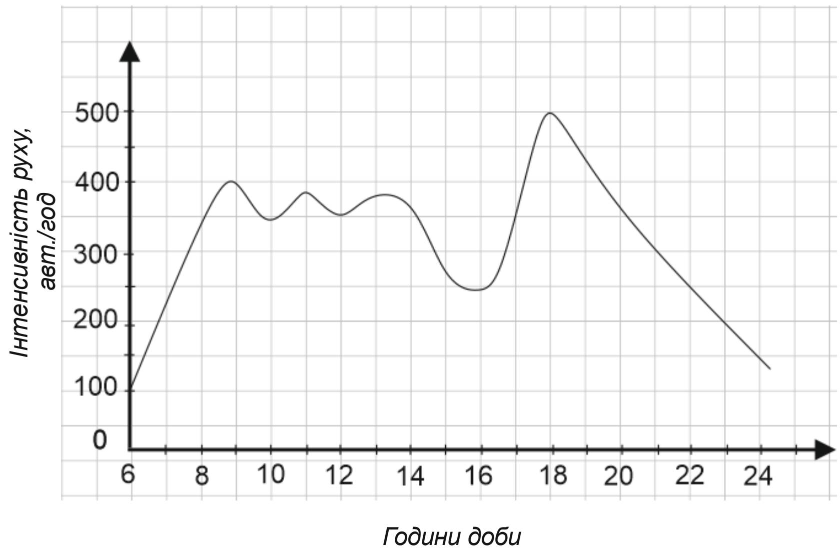


Рис. 2.30. Графік (модель) інтенсивності руху автомобілів

Зрозуміло, що саме такого графіка в житті, мабуть, не було, а якщо схожий трапиться, то потрібно вміти його читати. Цим слід умотивувати учнів до формування потреби в розв’язуванні таких задач. Далі вчитель пояснює зміст поняття *інтенсивність руху автомобілів* (кількість автомобілів, що проїжджають магістраллю повз уявного спостерігача в певний час доби). Якщо цю величину позначити латинською літерою T, то зрозуміло, що вона залежатиме від часу доби, який позначають t.

Учням потрібно усвідомити, що маємо залежність величини T від t, яка, як відомо з алгебри, є функцією. Отже, маємо функцію $T = f(t)$, задану графічно. Після такого обговорення стає зрозуміло, що знаходження відповіді на поставлені запитання зводиться до знаходження значення функції для заданого значення аргументу, проміжків зростання тощо.

Максимальна інтенсивність руху $T = 500$ *авт/год*. Це відповідає за графіком для $t = 18$ *год*. Знайдемо, скільки становить 70% від максимальної інтенсивності: $500 \cdot 0{,}7 = 350$ (*авт/год*). Користуючись графіком, знаходимо, що ординаті $T = 350$ відповідають такі значення аргументу t: 8 *год,* 10 *год,* 12 *год,* 14 *год* 20 *хв*, 17 *год*, 20 *год* 10 *хв*. Графік функції зростає на проміжках $[6\ \textit{год}; 8\ \textit{год}\ 50\ \textit{хв}]$; $[10\ \textit{год}; 11\ \textit{год.}]$; $[12\ \textit{год}; 13\ \textit{год}]$; $[15\ \textit{год}\ 50\ \textit{хв}; 18\ \textit{год}]$. Увагу учнів слід звернути на те, що значення аргументу t вибрано наближено.

Далі розглянемо добірки задач відповідно до того, яка функція є математичною моделлю, що описує ситуацію в умові задачі.

2.4.1. Лінійна функція і обернена пропорційність як математичні моделі прикладних задач

Для визначення яких саме задач недостатньо в навчальному процесі, ми вивчили матеріали чинних підручників з алгебри на наявність прикладних задач : 8% – Бевз Г. П. , Бевз В. Г. Алгебра: Підручник для 7 кл. – Київ, 2015 [8], 12% – Кравчук В. Р. Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвіт. навч закл. – Тернопіль, 2014 [79], 19,1% – Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Харків, 2015 [103].

З-поміж прикладних задач у підручнику [8] є задачі на підрахування витрат виробництва; дослідження графіка зміни температури повітря протягом доби; запис формул для знаходження площ та периметра фігур у загальному вигляді та за малюнком; переведення одиниць вимірювання; на опис за допомогою функції, зв’язку між шляхом та швидкістю руху різних об’єктів.

Важливо, що в підручнику [103] задачі прикладного змісту подано під час пояснення теоретичного матеріалу параграфа та вміщено у вправи на повторення. Запропоновані задачі описують процеси руху туристів та транспортних засобів, рівень води в річці, температуру повітря, криві попиту (описують залежність попиту на товар залежно від ціни), деякі опираються на навчальний матеріал з геометрії та хімії.

Вивчення *лінійної функції* доцільно починати з розгляду декількох прикладів, що готують до розуміння цього поняття. Наприклад:

1. Скільки грошей витратив учень, купивши *n* батончиків по 10 грн?
2. Вартість проїзду між містами становить 60 коп за км. Пасажир проїхав *s* км, визначте вартість квитка.
3. Знайти масу *m (г)* золотої дротини об’ємом $V(см^3)$, якщо густина золота становить $\rho = 19{,}3 \ {}^{г}\!/\!_{см^3}$.

Після наведених прикладів учні записують такі формули: $y = 10 \cdot n$ ($n \in N$), $y = 0{,}6 \cdot s$ ($s > 0$), $m = 19{,}3 \cdot V$, ($V > 0$) і з’ясовують, що в кожному з випадків записано пряму пропорційну залежність. Також можна запропонувати учням самостійно створити приклади, які описують такий тип залежності.

Узагальнити всі ці задачі можна записом формули, яка визначає пряму пропорційність $y = k \cdot x$, де $k \neq 0$, x − незалежна змінна, y − залежна змінна. Потрібно запропонувати учням задачі у яких передбачено розпізнавання прямої пропорційності з-поміж функцій, заданих різними способами, і задачі на визначення коефіцієнта прямої пропорційності.

Для побудови графіка прямої пропорційності доцільно брати не дві точки, а більше, вносити їх в таблицю значень функції й у подальшому переносити в систему координат. Після нанесення точок з'ясовують, що всі вони лежать на одній прямій, яка є графіком прямої пропорційності. Зрештою учні доходять висновку, що для побудови прямої достатньо лише двох точок. Для контролю під час перших побудов потрібно брати три точки.

У результаті вивчення графіка функції встановлюють, що він залежить від коефіцієнта прямої пропорційності, а саме, при $k>0$ пряма розташована в I і III чвертях, а при $k<0$ пряма розташована в II і IV чвертях. Також за графіком функції варто вивчити її властивості.

Розглянемо задачі *побутового змісту*, у яких математична модель – лінійна функція, у задачах № 2 і № 3 її потрібно записати за відповідними даними, а в задачі № 4, яка має професійний зміст, її задано і потрібно лише дослідити. Задачі № 2 – № 3 *належать до типу А, рівня складності I, математичну модель не задано і її потрібно створити*.

У 7-му класі під час вивчення теми «Лінійна функція» учні ознайомлюються з аналітичним і табличним способами задання функції. При цьому у них формуються вміння досліджувати лінійні функції, знаходити за заданими значеннями аргументу відповідні значення функції, будувати графіки функцій. Задачі № 2 і № 3 пов'язані, у них спільним є зв'язок площі з поливом або з висіванням кукурудзи, їх можна використовувати разом, тому саме задачу № 3 можна запропонувати на самостійне опрацювання.

Задача № 2. Денна норма поливу газону *10* $л/м^2$. Знайти залежність використання води від площі поливу S. Побудувати графік отриманої залежності. Обчислити, скільки води потрібно для поливу 10 $м^2$, 200 $м^2$, 2 га.

Розв'язання. Нехай *x* – площа газону, який потрібно полити, тоді *y* – кількість води, що використовується для поливу газону. Математична модель задачі –

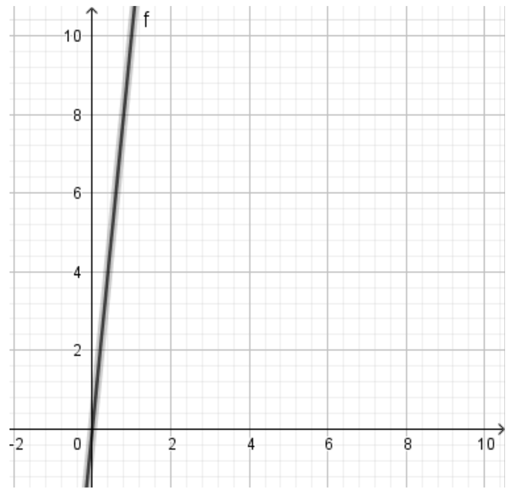


Рис. 2.31. Графік функції

лінійна функція виду: $y = 10 \cdot x$. Зазначимо, що за умовою задачі область визначення функції $x \geq 0$. Побудуємо її графік.

$y(10) = 100$ $л$ – води потрібно для поливу 10 $м^2$ газону.

$y(200) = 2000$ $л$ – води потрібно для поливу 200 $м^2$ газону.

Для $2га = 2 \cdot 10000 = 20000$ $м^2$, потрібно $y(20000) = 200000$ $л$ води.

Відповідь. 100 л, 2000 л, 200000 л.

Задача № 3. Норма висівання кукурудзи – 60 тис. насінин на гектар. Знайдіть залежність розходу посівного матеріалу на гектар від засіяної площі S. Побудуйте графік отриманої залежності. Скільки зерна потрібно, щоб засіяти площу 80 га, 150 га?

Наступна задача належить до типу А, рівень складності I, оскільки математичну модель задано і її потрібно дослідити.

Задача № 4. Дано формулу розрахунку добової норми вживання калорій.

$N = x(655 + 9{,}6 \cdot M + 1{,}8 \cdot Z - 4{,}7 \cdot V)$, N – добова норма вживання калорій в ккал, M – вага в кілограмах, Z – зріст у сантиметрах, V – вік у роках.

Відомо, що вага людини 50 кг, вік 30 років, зріст 170 см. Розрахувати добову норму вживання кілокалорій для цієї особи в різних видах фізичної активності, поданих у таблиці. Побудувати за отриманими результатами графік залежності виду фізичної активності від добової норми вживання калорій.

Таблиця 29

Вид активності	***x – коефіцієнт***	***N – добова норма вживання калорій***
Мінімальна фізична активність	1,2	
Легке навантаження 1 – 3 рази на тиждень	1,3	
Тренування 3 – 5 разів на тиждень	1,6	

Розв'язання: N – лінійна функція.

$N = x(655 + 9{,}6 \cdot 50 + 1{,}8 \cdot 170 - 4{,}7 \cdot 30) = 1300 \cdot x$

Побудуємо таблицю значень функції:

Таблиця 30

Вид активності	***x – коефіцієнт***	***N – добова норма вживання калорій***
Мінімальна фізична активність	1,2	$1300 \cdot 1{,}2 = 1560$
Легке навантаження 1 – 3 рази на тиждень	1,3	$1300 \cdot 1{,}3 = 1690$
Тренування 3 – 5 разів на тиждень	1,6	$1300 \cdot 1{,}6 = 2080$

Графіком лінійної функції є пряма тобто між фізичною активністю й нормою вживання калорій спостерігається пряма залежність (рис. 2.32).

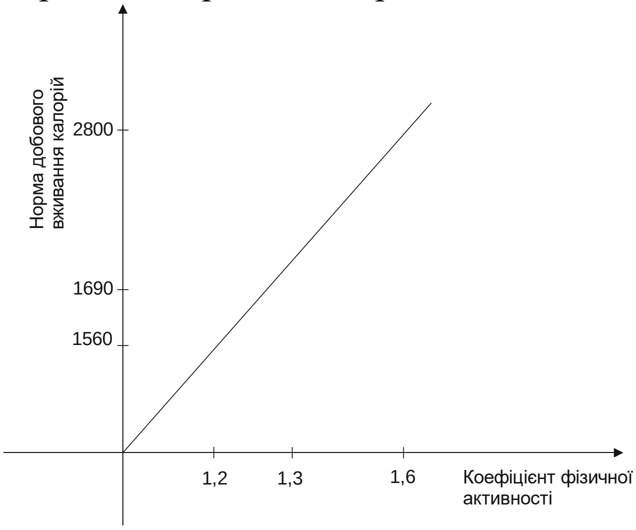


Рис. 2.32. Графік залежності фізичної активності і норми вживання калорій

Відповідь: зі збільшенням виду активності повинна збільшуватися норма вживання калорій.

На основі цієї задачі можна утворити відкриту задачу, а саме запропонувати учням здійснити аналогічні розрахунки для себе або своєї родини.

У підручниках можна знайти завдання, у яких функції мають вигляд системи умов, однак прикладних задач з-поміж них немає, тому корисно застосувати задачі побутового змісту, у яких математичну модель задано таблицею (належить до типу С, рівень складності ІІ).

Задача № 5. Норми «спаду ваги» охолодженого м’яса за умови його збереження при температурі від +4°С до 0°С подано в таблиці 32. Записати аналітичний вигляд функції й побудувати її графік. Здійснити відповідні дослідження для м'яса масою 40 кг.

Таблиця 31

Процес збереження охолодженого м'яса

Термін зберігання охолодженого продукту			
1 доба	2 доба	3 доба	Примітка
0,4 %	0,6 %	0,8 %	За умови збереження продукту охолодженим терміном понад 3 дні подальший спад маси нараховують у розмірі 0,02 % від маси на третій добі.

Розв'язання. За таблицею, наведеною в умові задачі, задамо функцію аналітично. Нехай m_0 – початкова маса м'яса під час охолодження, тоді m_3 – маса м'яса на третій день.

$$\begin{cases} m_0,\ 0-й \\ m_0 \cdot \left(1-\dfrac{0,4}{100}\right), 1-й \\ m_0 \cdot \left(1-\dfrac{0,6}{100}\right), 2-й \\ m_3 = m_0 \cdot \left(1-\dfrac{0,8}{100}\right), 3-й \\ m_3 \cdot \left(1-\dfrac{0,02}{100}\right), 4,5,6,.... \end{cases}$$

З використанням отриманої моделі здійснимо розрахунки для конкретної маси м'яса $m_0 = 40кг$.

Таблиця 32

Значення функції

День	0	1	2	3	4
Маса (кг)	40	39,84	39,76	39,68	39,67

Побудуємо графік заданої аналітично функції (рис. 2.33).

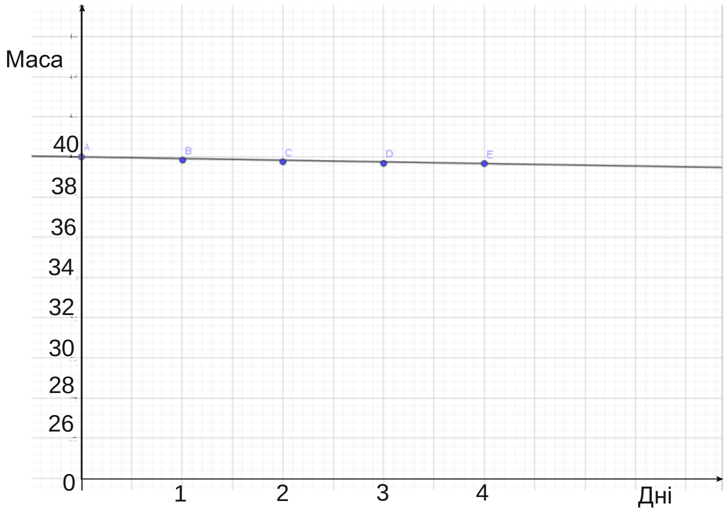


Рис. 2.33. Графік функції

Задачі № 6–№ 9 професійного змісту. У задачах № 7–№ 8 математичну модель не задано, а в № 6 і № 9 її задано й потрібно дослідити.

Задача № 6. Прибуток від реалізації продукції деякого підприємства можна записати у вигляді залежності $y=(a-b)\cdot x$, де a − роздрібна ціна на товар, x − об'єм випуску товару, b − планова собівартість товару.

Таблиця 33

Продаж соку

Роздрібна ціна	25 грн 50 коп
Планова собівартість товару (за 1 уп)	2 грн 50 коп

Таблиця 34

Продаж цукерок в упаковці

Роздрібна ціна	50 грн 45 коп
Планова собівартість товару (за 1 уп)	8 грн 50 коп

Задача № 7. Відстань між двома шахтами А і С складає 80 км. На шахті А добувають 300 т залізної руди в день, на шахті С – 100 т у день. З'ясувати, де доцільно побудувати завод для збагачення руди, щоб для її транспортування кількість тонно-кілометрів була найменшою?

Розв'язання. Реалізуємо умову задачі на рисунку. Нехай *x* – відстань між шахтою А і заводом, тоді (80–*x)* – відстань між шахтою С і заводом.

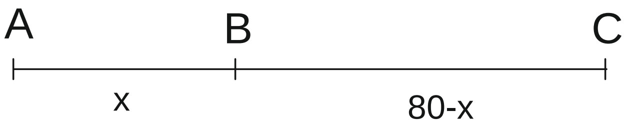


Рис. 2.34. Відстань між шахтами

$y(x) = 300 \cdot x + 100 \cdot (80 - x) = 200 \cdot x + 8000$. $k = 200$ функція зростає на проміжку $x \in [0;80]$, тому свого мінімального значення $y_{\min} = 8000$ набуватиме, коли $x = 0$. *Відповідь:* для мінімізації витрат потрібно будувати завод біля шахти А.

Задача № 8. Процес виготовлення золотого ланцюжка полягає в тому, що одним з його підготовчих етапів є виготовлення золотої дротини, з якої далі виготовлятимуть ланки ланцюжка. Установлено залежність між масою золотого брухту 585 проби та довжиною золотої дротини у вигляді функції $m(x) = \pi \cdot \rho \cdot x \cdot r^2$, де густина золота 585 проби $\rho = 12{,}85\ {}^{г}\!/\!_{см^3}$, а радіус дротини $r = 0{,}05\ мм$. Побудувати графік залежності довжини золотої дротини від маси бруска.

Рис. 2. 35. Золотий ланцюжок

Розв'язання. $x(m) = \dfrac{m}{\pi \cdot \rho \cdot r^2}$, урахувавши всі дані в умові задачі й обравши $\pi \approx 3{,}14$, маємо: $x(m) = \dfrac{m}{3{,}14 \cdot 12{,}85 \cdot 0{,}25} \approx 0{,}09 \cdot m$. Отримали лінійну функцію, коефіцієнт прямої пропорційності $k = 0{,}09$ указує на те, що функція буде розташована в I і III чверті, побудуємо її графік.

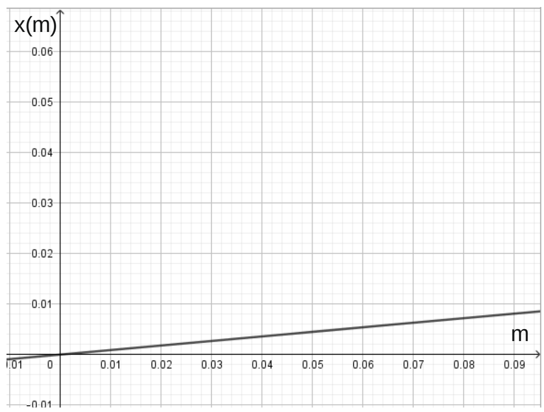


Рис. 2.36. Графік залежності довжини золотої дротини від маси брухту

Задача № 9. Для розрахунку потрібного часу для пішохідних світлофорів тривалість «зеленого» сигналу вираховують за спеціальною формулою: $T = \frac{L}{3} + 5$, де T – мінімальний час пішохідної фази (у секундах), L – ширина проїжджої частини по довгій стороні переходу (в метрах), 1,3 м/с – розрахункова швидкість руху пішохода, 5 секунд – запас про всяк випадок для пішоходів, які маломобільні, неквапливі і такі, що запізнюються. Побудувати графік залежності часу пішохідної бази від ширини проїжджої частини і знайти значення для: $L = 3\,м$, $L = 6\,м$.

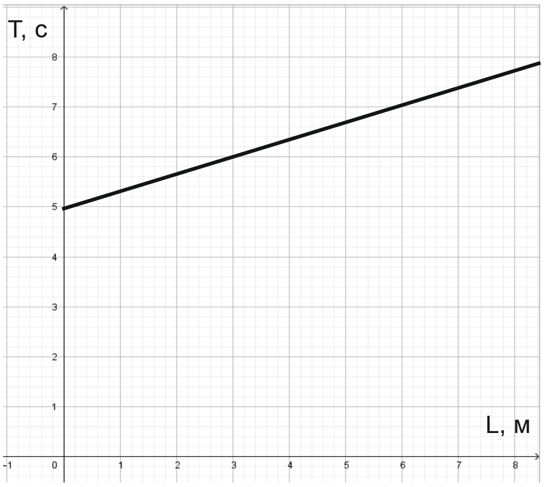


Рис. 2.37. Графік (модель) функції

Методичний коментар. Якщо запропонувати таку задачу семикласникам, то не кожен з них зможе розпізнати у формулі лінійну функцію, однак, якщо літеру T замінити літерою y, а літеру L – літерою x, то матимемо формулу $y = \frac{1}{3}x + 5$, відому учням як формула, якою задають лінійну функцію.

Після такого розпізнавання учням потрібно з'ясувати, що змінна T (вона ж y), змінна L (вона ж x) від'ємних значень приймати не зможе. Далі учні зрозуміють вимоги задачі, оскільки графік і властивості лінійної функції вони вивчили раніше.

Очікуване розв'язання. У функції $T=\frac{L}{3}+5$ коефіцієнт $k=\frac{1}{3}$, тому вона зростає на області визначення. Відповідно до умови задачі область визначення функції $L\in(0;+\infty)$. Побудуємо графік функції по точках.

Таблиця 35

L, м	0	9
T, с	5	8

Знаходимо значення функції L = 3 м і L = 6 м. T(3) = $\frac{1}{3}\cdot 3+5=6$ (с), T(6) = $\frac{1}{3}\cdot 6+5=7$ (с). *Відповідь*: 6 с ; 7 с.

Задачі № 10–№ 13 міжпредметного змісту, у яких математичну модель задано і її потрібно дослідити, рівень складності ІІ, тип А.

Задача № 10. Залежність тиску рідини $p\,(Па)$ від глибини занурення в неї $h\,(м)$ задано у вигляді $p\,(h)=\rho\cdot g\cdot h$, де $\rho\left(\frac{кг}{м^3}\right)$ – густина рідини, $h\left(м\right)$ – глибина, на якій визначається тиск, $g=10\,\frac{м}{с^2}$ – показник тяжіння. Відомо, що густина морської води $\rho=1030\,\frac{кг}{м^3}$, а прісної $\rho=1000\,\frac{кг}{м^3}$. Запишіть функції, які демонструють залежність тиску від глибини занурення окремо в прісній і морській воді. Скласти таблицю значень отриманих функцій. Побудувати на одному рисунку графіки отриманих функцій, зробити висновок.

Розв'язання. $p\,(h)=1030\cdot 9{,}8\cdot h=10094\cdot h$, $p\,(h)=1000\cdot 9{,}8\cdot h=9800\cdot h$. Тиск буде більшим за умови занурення в морську воду.

Задача № 11. Кількість теплоти, яка потрібна для нагрівання 5 л води від 20°С до температури *x*°С, задано формулою $Q(x)=21000\cdot\left(x-20\right)$. Побудувати графік функції $Q(x)$, що демонструє нагрівання води до кипіння. Визначити за графіком: кількість теплоти, потрібну для нагрівання води до 24°С, 35°С, 40°С; до якої температури нагрілася вода, якщо на нагрівання було витрачено 1260 Дж теплоти.

Задача № 12. Під час нагрівання лінійні розміри тіла збільшуються, їх можна задати формулою: $l = l_0 \cdot (1+\alpha t)$, де l_0 − довжина тіла за температури 0°C, t − температура середовища, α − коефіцієнт лінійного розширення, l − довжина тіла за температури t°C. У вигляді якої функції можна записати залежність довжини сталевого стержня ($l = 2\,м$) від його температури, якщо коефіцієнт лінійного розширення сталі становить $\alpha = 0{,}000012 \frac{1}{°C}$. Побудувати графік отриманої функції для значень температури від $-20°C$ до $20°C$. Визначити довжину стержня за температури $5°C, 20°C, -10°C$. Розрахувати, до якої температури потрібно нагріти стержень, щоб його довжина становила 2,0014 м. *Розв'язання.* $l = 2 \cdot (1+0{,}000012t)$. Відповідні довжини за вказаних температур: 2,00012 м; 2,00048 м; 1,99976 м. Температура за довжини 2,00014 м становитиме близько 60°C.

У задачі № 13 математичну модель не задано і її потрібно створити й дослідити, рівень складності ІІ, тип С.

Задача № 13. На рисунку наведено графік залежності видовження пружини від маси підвішеного до неї вантажу. Запишіть в аналітичному вигляді зазначену залежність і визначте жорсткість пружини.

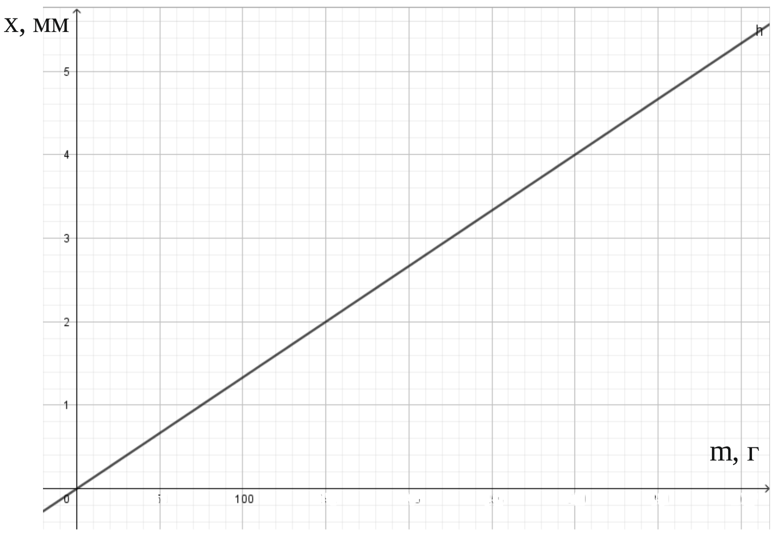


Рис. 2.38. Графік залежності видовження пружини від маси підвішеного до неї вантажу

Розв'язання. Відповідно до рисунка визначили, що точки (150;2) і (300;4) належать графіку функції $x = k \cdot m + b$, тому $\begin{cases} 2 = k \cdot 150 + b \\ 4 = k \cdot 300 + b \end{cases}$;

$\begin{cases} 2 = k \cdot 150 + b \\ 4 = k \cdot 300 + b \end{cases}$, $k = \dfrac{1}{75}$, $b = 0$. $x = \dfrac{1}{75} \cdot m$. $k = \dfrac{F_{пружності}}{x}$.

Для підбиття підсумків вивчення теми «Лінійна функція» можна запропонувати навчальний проєкт «Лінійна функція в майбутній професійній діяльності» (приклад наведено в Додатку Є).

Після вивчення лінійної функції в 7 класі, наступну функцію з якою ознайомлюються учні, – $y = \dfrac{k}{x}$, вивчають у 8 класі. У процесі вивчення цієї функції доречно пояснити перехід від поняття пряма пропорційність до обернена пропорційність, важливо разом з учнями розрізнити ці поняття.

Завдання: установити відповідність між поняттям та характеристикою.

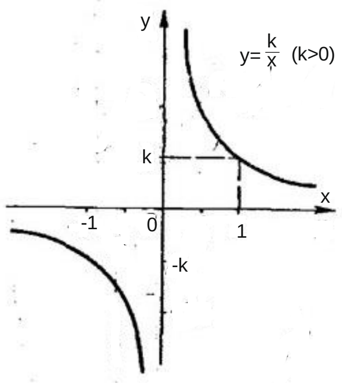
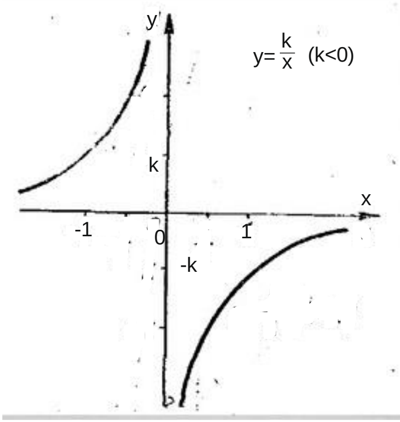
Таблиця 36

Пряма пропорційність	А)	А) залежність між двома величинами, за якої збільшення однієї величини забезпечує збільшення другої
	Г)	Б) залежність між двома величинами, за якої зі збільшенням однієї величини друга зменшується
Обернена пропорційність	В)	В) залежність між швидкістю і часом на сталій відстані (ту саму відстань можна проїхати з різною швидкістю й за різним часом)
	Б)	Г) залежність між сумою покупки й кількістю продукту за його сталої ціни

Далі за точками будують графіки функцій $y = \dfrac{k}{x}$ для різних коефіцієнтів k, окремо зазначають, що залежно від нього потрібно визначати ввігнутість графіка функції до вершини прямого кута. Це можна представити у вигляді таблиці.

Таблиця 37

Графік і властивості функції $y=\dfrac{k}{x}$

	$y=\dfrac{k}{x},\ k>0$	$y=\dfrac{k}{x},\ k<0$
Графік		
Властивості:	Область визначення $x\in(-\infty;0)\ i\ (0;+\infty)$. Множина значень $y\in(-\infty;0)\ i\ (0;+\infty)$. Спадає на області визначення.	Область визначення $x\in(-\infty;0)\ i\ (0;+\infty)$ Множина значень $y\in(-\infty;0)\ i\ (0;+\infty)$. Зростає на області визначення.

Узагальнити вивчені теоретичні поняття дозволяють задачі міжпредметного й побутового змісту. Зокрема в задачі № 14 математичну модель задано у вигляді графіка, її потрібно записати в аналітичному вигляді та дослідити (рівень складності ІІ, тип А). Математичну модель у задачі № 15 не задано, її потрібно записати, створити та дослідити (рівень складності ІІ, тип В).

Задача № 14. З використанням графіка функції (рис. 2.39), на якому представлено залежність атмосферного тиску p (мм рт. ст.) від висоти h (км) над рівнем моря, установити вигляд функції, побудувати таблицю значень і дослідити її.

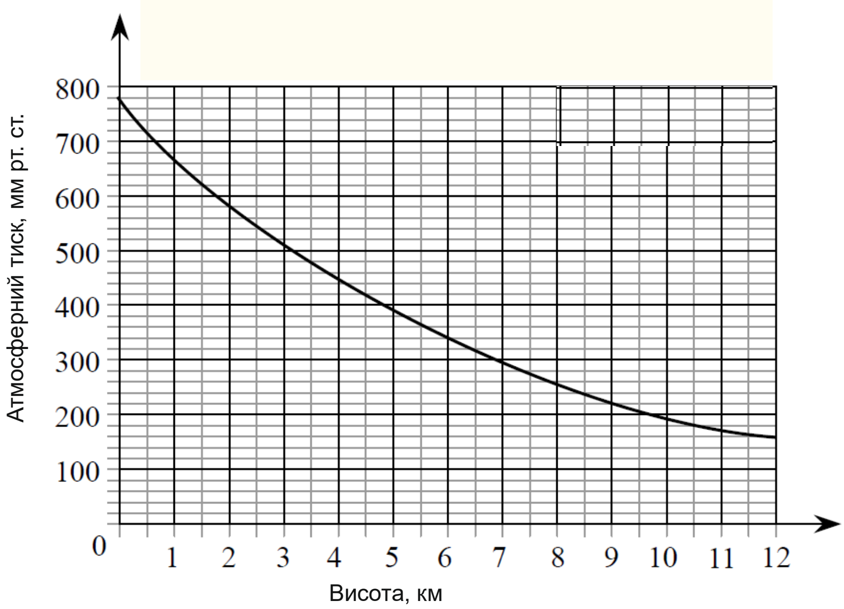


Рис. 2.39. Залежність атмосферного тиску від висоти над поверхнею Землі

Задача № 15. На пляжі потрібно обгородити намет, з дерев'яним накриттям, сатиновою тканиною по його периметру, з мінімальною витратою матеріалів. Відомо, що площа, яку потрібно обгородити складає 100 м^2.

Розв'язання. Нехай x – довжина однієї сторони ($x > 0$), тоді $\frac{100}{x}$ – довжина другої сторони. Математичною моделлю до задачі є функція, яка виражає залежність периметра від довжин його сторін (1).

$P(x) = 2 \cdot (x + \frac{100}{x})$ (1), дослідження цієї функції здійснимо за графіком функції, який побудуємо з допомогою програми GeoGebra (рис. 2.40).

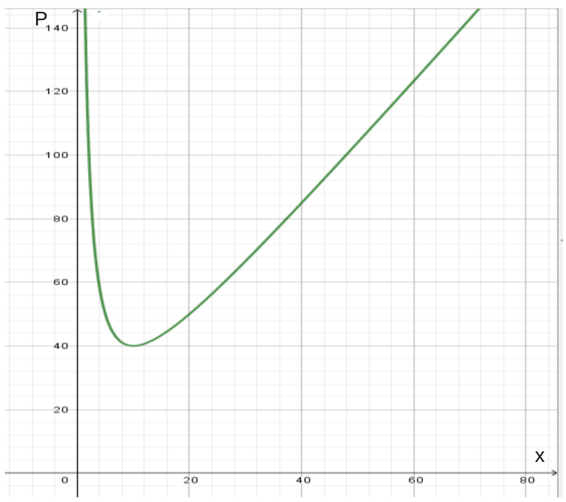


Рис. 2.40. Графік функції

1. Знайдемо область визначення функції. В умові задачі йдеться про довжини сторін прямокутника, тому з області визначення обираємо лише значення, для яких $P \in (0;\infty)$ і $x \in (0;\infty)$.

2. За графіком функції можна встановити, що при $x \in (0;10)$ функція спадає, а при $x \in (10;+\infty)$ зростає, тому мінімальне значення периметра 40 м досягається при $x = 10$ м.

Відповідь: мінімальна витрата тканини досягається, якщо параметри обгородженої частини будуть 10 на 10 м.

2.4.2. Квадратична й $y = \sqrt{x}$ функції як математичні моделі прикладних задач

Уперше з *квадратичною функцією* учні ознайомлюються у 8 класі на початку вивчення теми «Квадратні корені». Відповідно до програми їм коротко надають початкові відомості про функцію виду $y = x^2$, її графік, область визначення, область значень, після чого вивчають функції виду $y = \sqrt{x}$. Розглянемо задачі (міжпредметні, побутові, професійні), де названа функція буде математичною моделлю описаного в умові процесу.

Приклади задач міжпредметного змісту, рівень складності I, тип А, математичну модель задано.

Задача № 16. Період коливань математичного маятника пропорційний квадратному кореню з довжини маятника, тобто $T(l) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, де $g = 9{,}8\ {}^{м}\!/_{с^2}$, а $\pi \approx 3{,}14$. Побудувати графік такої функції та дослідити його.

Задача № 17. Дано графік залежності швидкості фотосинтезу від концентрації вуглекислого газу (рис. 2.41). Дослідити функцію.

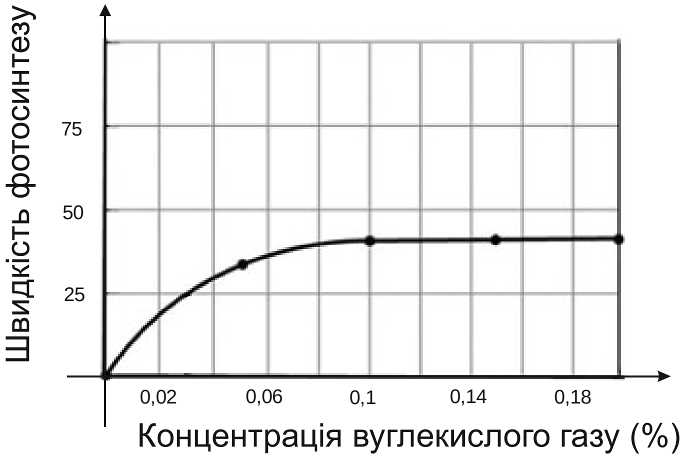


Рис. 2.41. Швидкість фотосинтезу

Розв’язання. Вивчивши функцію за малюнком, визначили її властивості. Область визначення $x \in [0; 0{,}2]$, множина значень $y \in [0;50)$. Нуль функції в $x = 0$. Функція додатна на всій області визначення. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тому функція зростає на $x \in [0; 0{,}1]$, але на $x \in (0{,}1;0{,}2)$ функція має стале значення. За швидкості фотосинтезу в межах $30 < y < 50$ відповідно до графіка, концентрація вуглекислого газу є сталою.

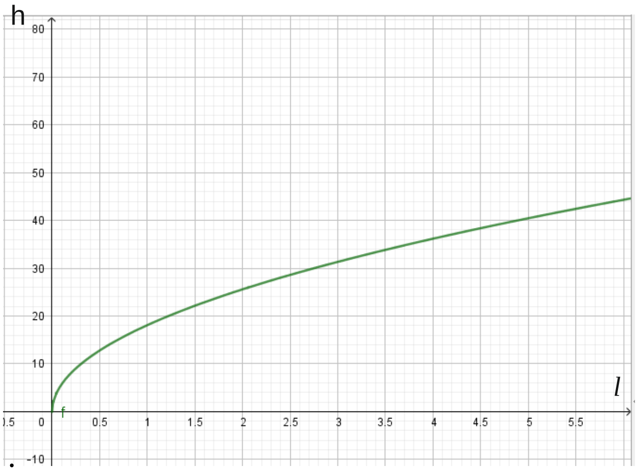


Рис. 2.42. Графік занурення підводного човна на глибину

Задача № 18 (рівень II, тип B, математичну модель не задано). Туристичний підводний човен здійснює занурення на глибину 30 м, рухаючись зі швидкістю 3 вузла. Побудувати графік залежності $h(l)$, якщо середня густина підводного човна під час занурення $\rho = 1040\frac{кг}{м^3}$, а густина морської води $1030\frac{кг}{м^3}$. $(1\,вузол = 1{,}852\,\frac{км}{год})$.

Розв’язання. Підводний човен у початковий момент часу знаходиться на поверхні моря, у процесі занурення цистерни баласту заповнюються водою (будемо вважати, що цей проміжок часу малий) і сила Архімеда стає меншою за силу тяжіння: $m \cdot a = m \cdot g - F_A \;\Rightarrow\; \rho \cdot V \cdot a = \rho \cdot V \cdot g - \rho_в \cdot V \cdot g$, $a = \dfrac{\rho - \rho_в}{\rho}$ (1) – прискорення, з яким занурюється човен. Використаємо кінематичні рівняння:

$$\begin{cases} h = \dfrac{a \cdot t^2}{2} \\ l = v \cdot t \end{cases} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 \;(2),\; l = \sqrt{\frac{\rho \cdot v^2 \cdot h}{(\rho - \rho_в) \cdot g}}.$$

$$l = \sqrt{\frac{1040 \cdot (3 \cdot 1{,}852)^2 \cdot h}{(1040 - 1030) \cdot 9{,}8}} \approx \sqrt{327{,}6 \cdot h}.$$

Задачі з професійний змістом, математичні моделі задано у вигляді графіка або таблиці, рівень I, тип A, передбачено закріплення вмінь читати графіки функцій, способи задання функцій, уміння досліджувати функції.

Задача № 19. Дано графік залежності між річним виловом риби та її запасом у річках (рис. 2.43). Дослідити функцію.

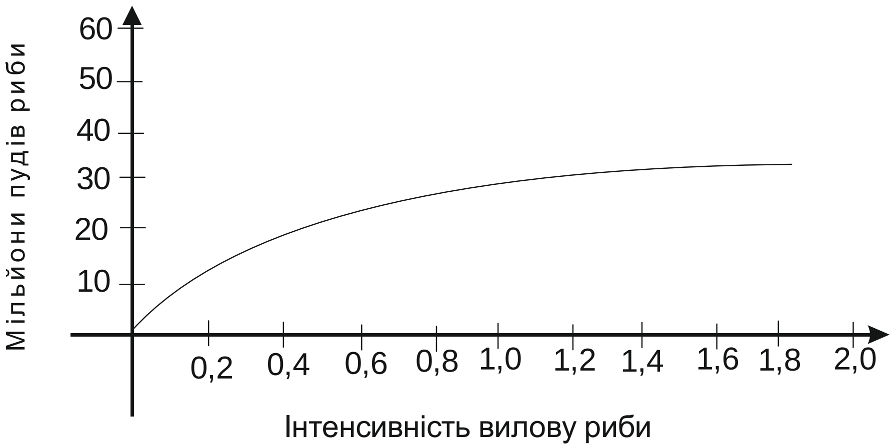


Рис. 2.43. Графік залежності між річним виловом і запасом риби в річці

Задача № 20. Дано таблицю значень ваги новонародженої дитини (початкова маса 4100 г), що змінюється протягом року. Побудувати графік залежності й визначити аналітичний вигляд функції, дослідити її. З’ясувати, на скільки відсотків збільшилася вага через 5 місяців після народження.

Таблиця 38

Вага (кг)	5,9	6,7	8,1	9,2	10	10,2	10,5	10,7	10,8
Вік (місяці)	1	2	3,5	5	7	8	9	10	11

У 9 класі основне й детальне вивчення теми «Квадратична функція, її графік і властивості» доцільно почати з підготовчої роботи, що складається з таких кроків: повторити раніше вивчені функції та їх графіки, продемонструвати графік квадратичної функції, її види та різні способи розміщення; пояснити й запропонувати записати термінологію, яку використовують під час побудови графіків функцій; вивчити властивості квадратичної функції (область визначення, множина значень, нулі функції, монотонність, знакосталість).

У системі задач для конкретної математичної моделі $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, ми пропонуємо задачі, різні за змістом, рівнями складності, заданістю математичної моделі. Для розв'язання задач учням доцільно запропонувати допоміжний матеріал з теорії – алгоритм, що допоможе в процесі дослідження математичної моделі (див. Додаток П).

Важливим моментом у дослідженні квадратичної функції є процес знаходження її вершини, тому пропонуємо задачі (професійного та побутового змісту), у яких орієнтуючись на *вершину параболи*, знаходимо максимальне чи мінімальне значення квадратичної функції.

Задача № 21. Прибуток підприємства за місяць обчислюється за формулою $d(p) = (200 - 2p) \cdot p$ (тис. грн.), до якої входить добуток обсягу виробництва на ціну. Встановити ціну *p*, яка забезпечить максимальний прибуток підприємству.

Розв'язання. Виразимо остаточний вигляд функції: $d(p) = -2 \cdot p^2 + 200 \cdot p$. Графіком отриманої функції є парабола, вітки якої спрямовано вниз, тому максимальне значення досягається у вершині параболи ($x_0 = \frac{-b}{2a}$). Для нашої функції $p_0 = \frac{-200}{-4} = 50$, тоді $d(50) = -2 \cdot 50^2 + 200 \cdot 50 = -5000 + 10000 = 5000$.

Відповідь: ціна 50 тис. грн забезпечить підприємству максимальний прибуток.

Сюжет розглянутої задачі демонструє учням процес підрахунку прибутку підприємства, що розкриває її професійний зміст, а умова задачі містить уже побудовану модель, процес дослідження якої є не складним, тому вона належить до I рівня складності. Наступна задача № 22 – побутового змісту у якій математичну модель не задано, що дозволяє закріпити її за II рівнем складності, саме тому вона матиме тип С.

Задача № 22. Сучасне життя складно уявити без паперового пакета. Такі пакети спрощують наше життя, оскільки використовуємо їх для збереження речей, транспортування, виконання рекламних функцій. У майстерні є спеціальний матеріал довжиною 340 мм і шириною 240 мм. Якими повинні бути розміри паперового пакета, щоб він мав максимальний об’єм? урахувати, що на склеєні краї (дно і бічний стик пакета) використовується окремо по 40 мм по довжині по ширині матеріалу.

Розв’язання. Пакет має форму прямокутного паралелепіпеда з об’ємом $V = abc$.

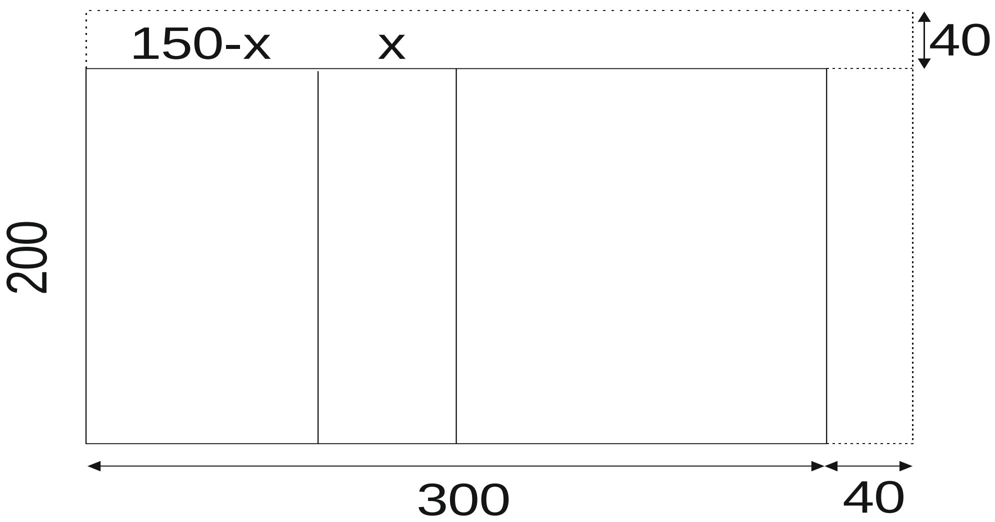


Рис. 2.44. Розгортка пакета

Позначимо через x і $(150 - x)$ сторони основи паперового пакету (рис. 2.44). Тоді отримаємо квадратичну функцію $V(x) = 200 \cdot (150 - x) \cdot x = -200 \cdot x^2 + 150 \cdot 200 \cdot x$. Властивості функції: графіком є парабола з вітками спрямованими вниз, свого максимального значення досягає у вершині, а саме в точці $x_0 = \frac{-150 \cdot 200}{2 \cdot (-200)} = 75$.

Відповідь: пакет матиме максимальний об'єм з розмірами $200 \times 75 \times 75$ (мм).

У наведеній задачі можна змінювати умову, однак в основі залишиться геометрична модель – паралелепіпед і його об'єм, що зводиться до дослідження квадратичної функції. Наприклад, є залізна сітка довжиною 3 м і висотою 1 м. Якими повинні бути розміри клітки, для домашніх тварин, щоб вона мала максимальний об'єм?

У процесі побудови *графіків функцій* використовують метод геометричних перетворень. Пропонуємо закріпити вивчення цієї теми такою задачею професійного змісту.

Задача № 23. На малюнку зображено емблему програми, яка захищає комп'ютер від вірусів. Виписати квадратичні функції, які входять до складу емблеми.

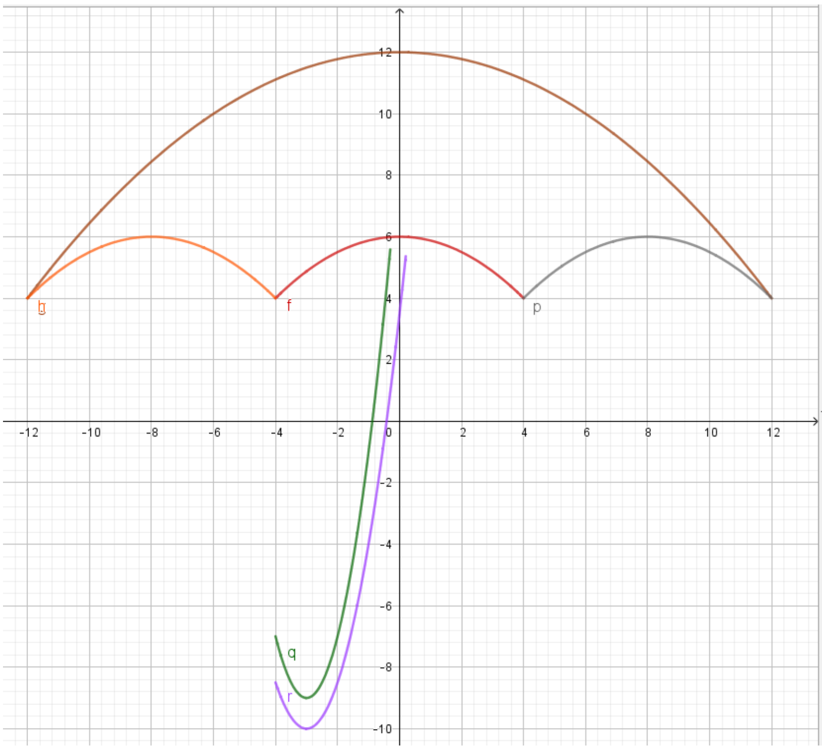


Рис. 2.45. Емблема програми

Розв’язання. Усі функції утворено методом геометричних перетворень функції $y = x^2$. Рухаємося згори вниз. Для визначення коефіцієнта перед *x*, потрібно обрати точку на графіку функції, наприклад, $(-12;4)$ і підставити у функцію $y = k \cdot x^2 + 12$, тоді отримуємо: $4 = k \cdot (-12)^2 + 12$, $k = -\frac{1}{18}$.

1. На проміжку $[-12;12]$ визначено функцію $y = -\frac{1}{18}x^2 + 12$.
2. На проміжку $[-12;-4]$ визначено функцію $y = -\frac{1}{8}(x+8)^2 + 6$.
3. На проміжку $[-4;4]$ визначено функцію $y = -\frac{1}{8}x^2 + 6$.
4. На проміжку $[4;12]$ визначено функцію $y = -\frac{1}{8}(x-8)^2 + 6$.
5. На проміжку $[-4;-0{,}3]$ визначено функцію $y = 2(x+3)^2 - 9$.
6. На проміжку $[-4;0{,}2]$ визначено функцію $y = 1{,}5(x+3)^2 - 10$.

Після розв’язання цієї задачі учням пропонують виконати індивідуальне завдання.

Індивідуальне завдання

1. Створити на міліметрівці з використанням графіка квадратичної функції емблему для власної фірми.
2. Записати функції, які увійшли до складу емблеми.
3. Побудувати емблему з використанням програмних засобів (Geogebra, Desmos).
4. Скласти задачу, яка передбачає застосування опрацьованих трьох кроків.

Унаслідок виконання такого індивідуального завдання забезпечить учні мають змогу зрозуміти особливості побудови графіків квадратичних функцій методом геометричних перетворень; виробити здатність будувати графіки функцій на конкретних проміжках; сформувати вміння записувати аналітичний вигляд функції за графічним; оволодіти вмінням використовувати програмні засоби для побудови графіків функцій; розвинути вміння визначати оптимальні масштаби для конкретних видів функцій.

Наведемо приклади задач міжпредметного змісту (фізичного).

Тип С, рівень ІІ, математичну модель не задано. Задача передбачає вироблення вміння: визначати вершину параболи, будувати графік функції (кроки 1 – 2 алгоритму Додаток П*).*

Задача № 24. Під час тренування волейболіст кидає м’яч над собою вертикально вгору на висоту 1,5 м. За допомогою спеціального радара з’ясовано, що швидкість м’яча становила 12 $м/с$. Записати залежність між висотою та часом підкидання волейбольного м’яча, побудувати її графік і встановити максимальну висоту, на яку піднімається м’яч, і час його падіння на землю. Зріст волейболіста становить 1 м 80 см.

Розв’язання. З курсу фізики відомо, що $h = -\frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot t + h_0$, підставимо $g = 9{,}8\ м/с$, $v_0 = 12\ м/с, h_0 = 3{,}3\ м$. Математична модель: $h = -4{,}9 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 3{,}8$, побудуємо схематично графік.

Вершина в точці $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{-9{,}8} \approx 1{,}2$, $y_0 = -4{,}9 \cdot (1{,}2)^2 + 12 \cdot (1{,}2) + 3{,}8 \approx 11{,}1$.

Для знаходження часу падіння м’яча потрібно покласти $h = 0$, $-4{,}9 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 3{,}8 = 0$.

$t_1 = 2{,}7$, $t_2 = -0{,}3$ (не задовольняє умову задачі), тому м’яч упаде на землю через 2,7 секунди.

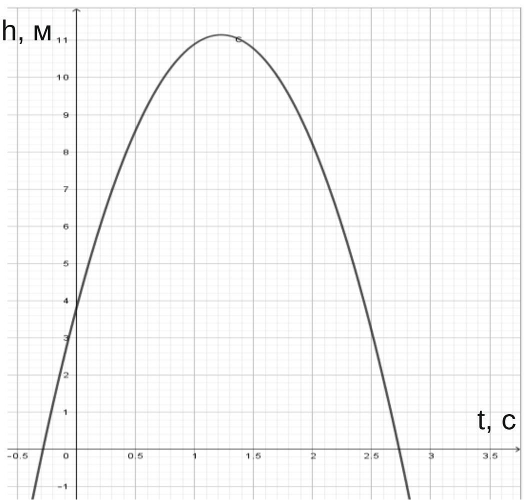


Рис. 2. 46. Графік функції

Тип С, рівень ІІ, математичну модель не задано. Задача передбачає формування вміння визначати вершину параболи, будувати графік функції (кроки 1–2 алгоритму Додаток П*).*

Задача № 25. Коли спортсменка масою 50 кг знаходиться на батуті в стані спокою, то прогин сітки становить 5 см. На яку висоту може підскочити акробатка відносно площини батуту, якщо під час відштовхування максимальний прогин сітки не повинен перевищувати x_{max}= 50 см. Побудувати графік залежності висоти підскакування спортсменки від прогину сітки *h(x)*.

Рис. 2. 47. Батут

Розв'язання. За статичного прогину сила тяжіння урівноважується силою пружності $mg = kx_0$, звідси коефіцієнт пружності $k = \frac{mg}{x_0}$. Потенціальна енергія пружної деформації переходить у кінетичну енергію, яка потім переходить у потенціальну енергію тіла. У результаті маємо: $h = \frac{k}{2mg}x^2 - x$, $h = 10x^2 - x$.

Тип В, рівень II, математичну модель не задано. Задача передбачає вироблення вміння визначати значення функції в конкретній точці.

Задача № 26. Для заміського будинку придбали батут (в інструкції зазначено, що висота ніжок 95 см, допустима висота стрибків 120 см). Виникло питання: чи не прогнеться пружне полотно до самої землі під час такого стрибка? Прогин полотна під дитиною, яка стоїть нерухомо на батуті, становить 4 см.

Розв'язання. Дивись попередню задачу: $h = \frac{1}{2x_0}x^2 - x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x_0}x^2 - x - h = 0$.

Розв'язавши рівняння, отримаємо *x=32 см*. Отже, сітка прогнеться на безпечну відстань.

Для розв'язування задачі *типу С, рівень складності II, з незаданою математичною моделлю* в учнів

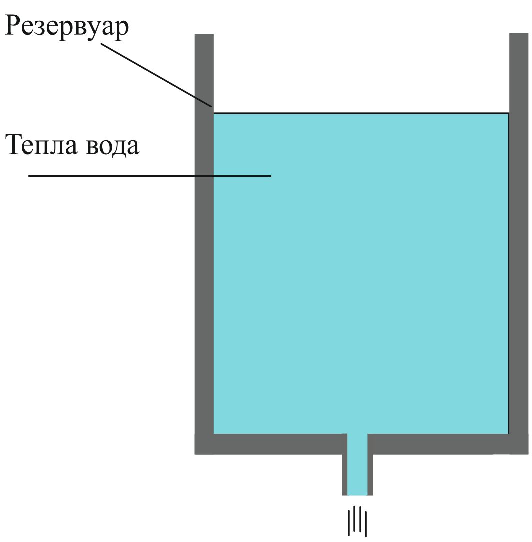


Рис. 2.48. Резервуар з водою

потрібно попередньо сформувати вміння: визначати вершину параболи, будувати графік функції (кроки 1–2, 6 алгоритму Додаток П).

Задача № 27. Рівень води в резервуарі (рис. 2.48) для літнього душу зменшується за квадратичним законом $H = 0{,}7 - 3{,}7t + 0{,}0025t^2$, де t – час (секунди), H – висота рівня води (м). Побудувати графік цієї функції. Визначити за графіком час, за який рівень води зменшився на половину, на дві третини.

Під час роботи над задачами можна демонструвати учням відеофрагменти процесів, описаних у сюжеті задачі, наприклад, у № 28 для ознайомлення із зрошувальними системами річкових каналів. Відповідно до нашої систематизації задача належить до *типу А, рівень складності І* (математичну модель задано). Її можна запропонувати для закріплення вмінь визначати вершину параболи, будувати графік функції (кроки 1–4, 6 алгоритму).

Задача № 28. Рівень води в зрошувальному каналі змінюється за формулою $h = 0{,}5 \cdot t^2 - 15 \cdot t + 113$, де h − висота рівня води, t − час, що відраховується від початку дня. Визначити, у які години рівень води піднімався, а в які – опускався? Якого найвищого рівня досягала вода в каналі?

Корисною для розгляду на факультативних заняттях є задача № 29. Вона об’єднує знання про фотосинтез, квадратичну функцію та наближені обчислення. За класифікацією належить до *типу С, математичну модель задано у вигляді графіка*, однак її дослідження складніше, ніж у попередніх прикладах, і вимагає від учнів нестандартного алгоритму дій, тому належить до *ІІ рівня*.

Задача № 29. Енергію, яка утворюється в результаті фотосинтезу в зеленій частині дерева, описано у вигляді графіка її залежності від інтенсивності освітлення. Записати формулу залежності. Установити: а) за якої інтенсивності дерево може виділити максимальну енергію в результаті фотосинтезу; б) проміжки на яких відбувається спадання й зростання процесу виділення енергії; в) скільки енергії утвориться в зеленій частині дерева за інтенсивності освітлення $x = 3{,}84$; г) якою має бути інтенсивність світла, щоб виділилась енергія 5,32 од., (установити за графіком й окремо з використанням калькулятора, обчислити відносну похибку отриманого результату).

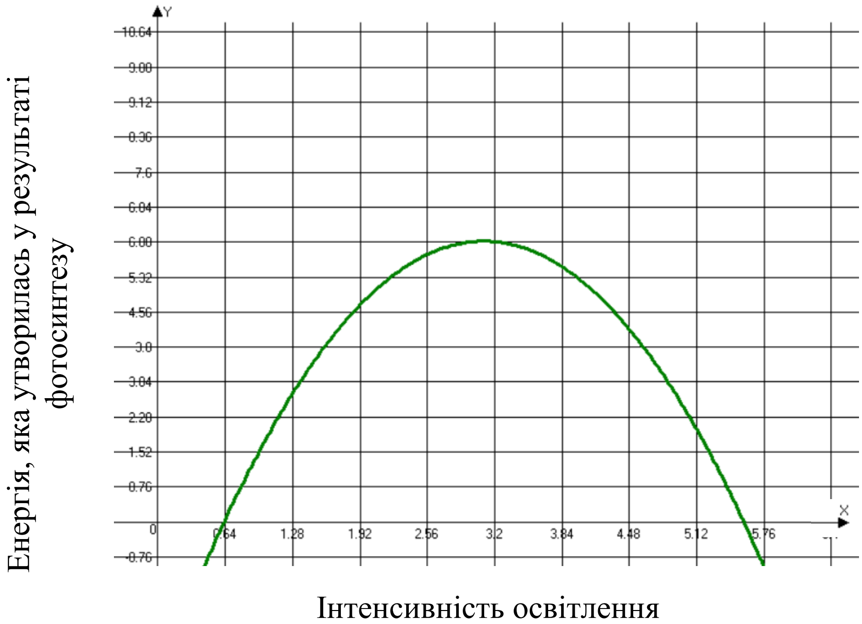


Рис. 2.49. Графік виділення енергії під час фотосинтезу

Розв'язання. Енергію, яка утворюється в результаті фотосинтезу в зеленій частині дерева, відповідно до поданого рисунка, записують за законом: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Для визначення коефіцієнтів a, b, c потрібно взяти три точки, що належать графіку функції й розв'язати систему рівнянь (1).

Визначимо за графіком функції три точки: $(0{,}64; 0), (3; 6), (5{,}12; 1{,}8)$.

$$\begin{cases} a \cdot (0{,}64)^2 + b \cdot 0{,}64 + c = 0 \\ a \cdot (3)^2 + b \cdot 3 + c = 6 \\ a \cdot (5{,}12)^2 + b \cdot 5{,}12 + c = 1{,}8 \end{cases} \quad (1),$$ отримаємо $a = -1{,}00971$, $b = 6{,}2177$, $c = -3{,}56576$.

На цьому кроці складність може виникнути під час виконання перетворень системи (коефіцієнти – десяткові дроби), можна використати для перевірки Microsoft Excel. Округлимо до десятих з недостачею, тоді енергію, що виділяється під час фотосинтезу, можна записати як $y = -x^2 + 6{,}2 \cdot x - 3{,}5$, $E(x) = -(x - 3{,}1)^2 + 6{,}1$.

а), б) математичною моделлю цього процесу є квадратична функція, вітки якої спрямовано вгору, тому максимальне значення енергії – найбільше значення функції $E(x)$, яке досягається в точці $x_0 = 3{,}1$ од. і становить 6,1 од.; спадання процесу виділення енергії відповідно до записаної функції відбувається на проміжку $(-\infty; 3{,}1)$, а зростання на проміжку $(3{,}1; +\infty)$;

в) при $x = 3{,}84$ $E(3{,}84) = -(3{,}84 - 3{,}1)^2 + 6{,}1 = 5{,}5524$ од.

г) $E(x) = -(x - 3{,}1)^2 + 6{,}1 = 5{,}32$.

Розв'язуємо квадратне рівняння $-(x - 3{,}1)^2 + 0{,}78 = 0$, $x^2 - 6{,}2x + 8{,}83 = 0$, $x_1 = 3{,}1 - \sqrt{0{,}78}$, $x_2 = 3{,}1 + \sqrt{0{,}78}$.

За калькулятором з округленням до десятитисячних: $x_{k1} = 3{,}1 - \sqrt{0{,}78} = 2{,}2168$, $x_{k2} = 3{,}1 + \sqrt{0{,}78} = 3{,}9831$.

За графіком: $x_1 = 2{,}226$, $x_2 = 3{,}972$.

Модель знаходження абсолютної похибки: $\Delta_1 = |x_{k1} - x_1|$; $\Delta_2 = |x_{k2} - x_2|$.

Модель знаходження відносної похибки: $\delta_1 = \frac{\Delta_1}{|x_{k1}|}$; $\delta_2 = \frac{\Delta_2}{|x_{k2}|}$.

$\Delta_1 = |2{,}2168 - 2{,}226| = 0{,}0092$; $\Delta_2 = |3{,}9831 - 3{,}972| = 0{,}0111$.

$\delta_1 = \frac{0{,}0092}{2{,}2168} \approx 0{,}0041 \approx 0{,}41\%$; $\delta_2 = \frac{0{,}0111}{3{,}9831} \approx 0{,}0027 \approx 0{,}27\%$.

Відповідь: а) 6,1 од.; б) спадання $x \in (-\infty; 3{,}1)$, а зростання на проміжку $x \in (3{,}1; +\infty)$; в) 5,5524 од; г) $\delta_1 \approx 0{,}41\%$; $\delta_2 \approx 0{,}27\%$.

Отже, у процесі вивчення змістової лінії «Функції та їх графіки» доцільно використовувати запропоновану систему прикладних задач, що передбачають математичне моделювання процесу або явища – функцію, яку потрібно дослідити. Розроблено навчальні проєкти (див. Додаток Е, Є), метою яких є створення та дослідження математичної моделі. Деякі задачі вимагають пошуку додаткової інформації, наприклад, якісного та кількісного тлумачення природних процесів (фізика, хімія, біологія та ін.) або здійснення професійного коментаря.

У результаті опрацювання теми відповідно до нашої методики учні засвоюють закономірності побудови знаково-символьних та образних моделей до процесів і явищ, описаних в умові прикладної задачі; удосконалюють обчислювальні навички; вчаться правильно оцінювати результат математичного моделювання, а саме співвідносити його з умовою задачі.

2.5. Використання інформаційно-комунікаційних технологій під час реалізації прикладної спрямованості

Інформаційно-комунікаційні технології проникли в усі сфери життя людини, що також вплинуло на організацію освітньої діяльності в школі. Упровадження таких технологій сприяє тому, що учні швидше засвоюють більший обсяг інформації, використовуючи при цьому значну кількість засобів.

На наш погляд, основними способами використання ІКТ в освітньому процесі є: *педагогічні програмні засоби* (GeoGebra, Gran-1,2,3, Живая математика); *Інтернет-ресурси* (Blogger.com інші Google продукти, Wikipedia, Prezi, Wordcloud.pro, Pictochart.com, Padlet.com, Glogster та ін.); *інтерактивна дошка та її програмне забезпечення* (Smart Board); *програми пакету Microsoft Office* (Power Point, MS Word, MS Excel).

2.5.1. Використання програмного забезпечення GeoGebra

Одним з важливих аспектів впливу на розвиток шкільної математики є упровадження в освітній процес інформаційно-комунікаційних технологій, оскільки, розв’язування прикладних задач з використанням ІКТ сприяє реалізації прикладної спрямованості курсу математики. Застосування ІКТ в освітньому процесі дає змогу учням самостійно створювати, спостерігати, досліджувати математичну модель – явище, яке описано в прикладній задачі.

Результати вивчення проблеми застосування прикладного програмного забезпечення Gran-1, Gran-2 для аналізу функціональних залежностей викладено в працях М. І. Жалдака, Є. Ф. Вінниченка, Ю. В. Горошка, Т. Г. Крамаренко [58; 81]. Питання використання програмного забезпечення

GeoGebra як системи динамічної математики становить науковий інтерес багатьох дослідників, з-поміж яких: Р. Зіатдінов, В. М. Ракута, В. В. Пікалов, О. О. Грибюк, П. І. Довбня [41;45;144], однак на сьогодні є потреба у створенні науково-методичного забезпечення її застосування в освітньому процесі, а саме під час вивчення дисциплін природничо-математичного циклу.

Використання програмного забезпечення GeoGebra підвищує ефективність навчального процесу, звільняє його від рутинних операцій. Переваги впровадження системи GeoGebra порівняно з іншими програмними засобами полягають в її інструментарії, який розраховано на процес навчання в загальноосвітньому закладі освіти, простота інтерфейсу дозволяє працювати з нею вчителеві без попередньої інформаційної підготовки.

У дослідженні ми розглянули прикладні задачі, які забезпечують вивчення змістової лінії «функції та їх графіки» в курсі алгебри основної школи та в процесі розв'язування передбачають використання програмного забезпечення GeoGebra, яка є продуктом міжнародного рівня з відкритим доступом. Цей програмний продукт рекомендовано застосовувати під час вивчення математичних дисциплін. Система має простий і зрозумілий інтерфейс, її розроблено як програму і як вебверсію. Функціональні можливості програми дозволяють використовувати її з різною дидактичною метою: створювати зображення фігур, графіків, а потім зберігати їх як файли графічних форматів, якість яких зберігається навіть за умови зміни розмірів. Перевагою цієї програми порівняно з іншими є її інструментальні можливості, важливі для використання в загальноосвітніх закладах освіти.

У контексті вивчення змістової лінії *«функції та їх графіки»* програма GeoGebra дає змогу побудувати графіки функцій, заданих аналітично; використовувати геометричні перетворення під час побудови графіків функцій; знаходження точки перетину двох графіків функцій; досліджувати функції (монотонність, нулі функції, область визначення й множина значень).

Пропонуємо розглянути застосування програмного забезпечення GeoGebra на прикладі вивчення теми «Квадратична функція» в процесі розв’язування прикладних задач. Ми обрали теми, з курсів фізики й алгебри 9 класу, які мають спільні математичні моделі. Це представлено в таблиці 39.

Таблиця 39

Квадратична функція в курсах алгебри й фізики

Математика	*Фізика*
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}$ (1)
$c = x_0$ (початкове переміщення); $b = v_{0x}$ (початкова швидкість); $a = \frac{a_x}{2}$ (прискорення)	

Розглянемо три різні випадки значень коефіцієнтів a, b, c для різних сюжетів і модифікацій однієї математичної моделі. Для кращого унаочнення використаємо програмне забезпечення GeoGebra, а саме створимо динамічну математичну модель квадратної функції, яка змінюється залежно від значення відповідних коефіцієнтів.

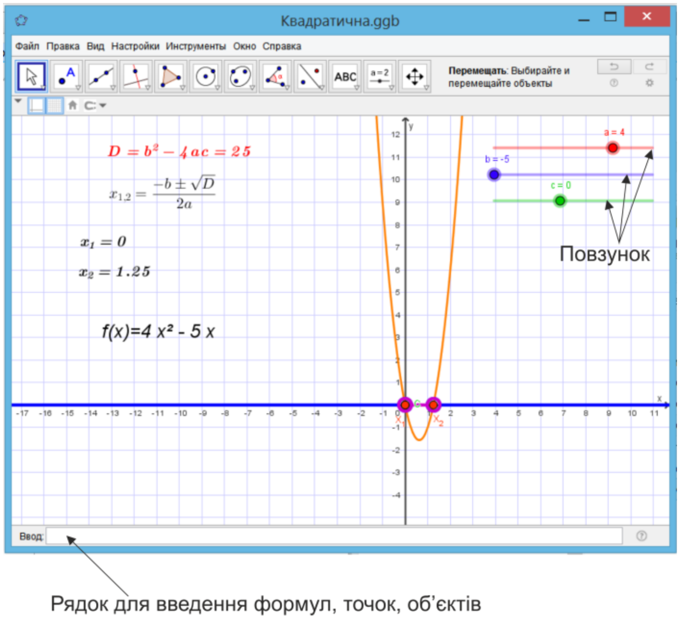


Рис. 2.50. Вікно програми GeoGebra

Змінюючи в програмі значення повзунків a, b, c, отримуємо різні варіанти розміщення квадратичної функції. Для кожного повзунка встановлюється максимальне, мінімальне значення та крок. Можна додатково організувати виведення інформації про точки перетину з віссю OX, після знаходження дискримінанта. Цю динамічну модель (рис. 2.50.) будемо використовувати для перевірки розв'язків і супроводу розв'язання задач № 1–№ 3.

Задача № 1. З гелікоптера, що завис на висоті 500 м скинули вантаж. Записати залежність відстані, яку долає вантаж під час вільного падіння, від часу його падіння. Побудувати графік отриманої залежності.

Розв'язання. У формулі (1) початкова швидкість і початкове переміщення дорівнюють нулю. Урахуємо, що вантаж падає з прискоренням вільного падіння $g = 9{,}8\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$, тому $h(t) = \dfrac{g \cdot t^2}{2}$, $h(t) = 4{,}9 \cdot t^2$.

У вікні програми встановлюємо значення повзунків $a = 4{,}9$, $b = 0$, $c = 0$. Результат отримуємо на рис. 2.51.

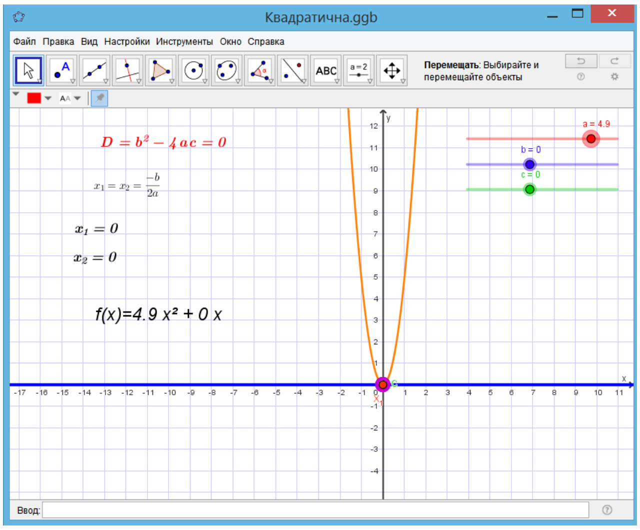


Рис. 2.51. Значення повзунків для задачі №1

Задача № 2. Автомобіль рухається рівномірно горизонтальною ділянкою зі швидкістю $36\,{}^{км}\!/\!{}_{год}$, маючи прискорення $1\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$. Виразити шлях x, який пройде автомобіль за час t. Побудувати графік отриманої залежності.

Розв'язання. Автомобіль здійснює рівномірний рух, тому математична модель до задачі має вигляд: $x = v_{0x} \cdot t + \dfrac{a_x \cdot t^2}{2}$. Урахуємо, що $v_{0x} = 36\,{}^{км}\!/\!{}_{год} = 10\,{}^{м}\!/\!{}_{c}$, а $a = 1\,{}^{м}\!/\!{}_{c^2}$, тоді $x = 10 \cdot t + \dfrac{t^2}{2}$. У вікні програми встановлюємо значення повзунків

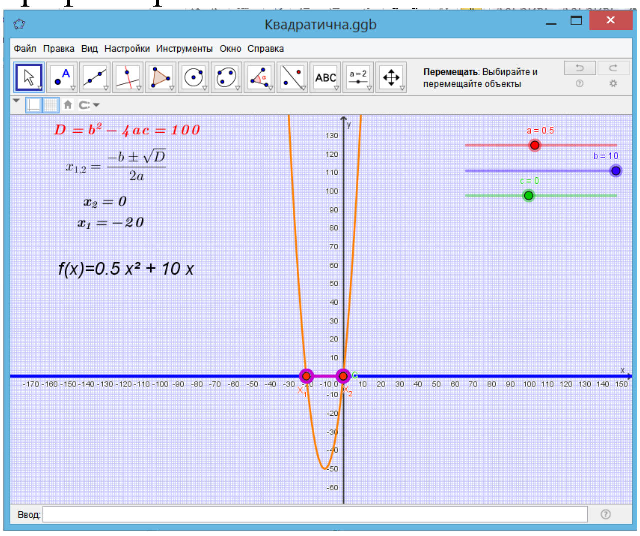


Рис. 2.52. Значення повзунків для задачі № 2

$a=\frac{1}{2}$, $b=10$, $c=0$ результат отримуємо на рис. 2.52.

Задача № 3. Графіком руху тіла є парабола, подана на рис. 2.53. З використанням рисунка записати рівняння залежності переміщення тіла від часу.

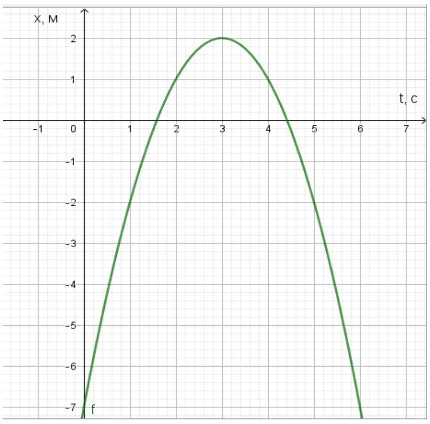


Рис. 2.53. Графік функції

Розв'язання. Зчитаємо з графіка функції його властивості, а саме: графіком є парабола, вітки якої спрямовано вниз, вершина в точці з координатами $(3;2)$, тобто $x(t)=a\cdot(x-3)^2+2$. Для визначення коефіцієнта *a* установимо точку перетину з віссю OY, відповідно до рис. 2.53 це точка $(0;-7)$, тому $x(0)=a\cdot(0-3)^2+2=-7$, звідки $a=-1$. Запишемо рівняння функції $x(t)=-(x-3)^2+2$. Зведемо до вигляду $x=x_0+v_{0x}\cdot t+\frac{a_x\cdot t^2}{2}$. Маємо $x=-7+6\cdot t+\frac{-2\cdot t^2}{2}$, де початкова швидкість тіла $v_0=6\,{}^{м}\!/_{с}$, початкове переміщення $x_0=-7м$, прискорення $a=-2\,{}^{м}\!/_{с}$.

У наступній задачі продемонстровано застосування програмного забезпечення GeoGebra для перенесення зображення в систему координат.

Задача № 4. Міст Тисячоліття (Gateshead Millennium Bridge), розташований у Гейтсхеді у Великобританії, є першим у світі рухомим мостом, що нахиляється. Міст складається з двох арок у вигляді парабол, одна з яких є пішохідною територією (див рис. 2.54). Відомо, що під час проходження під мостом великих суден його піднімають на висоту 25 м під кутом 40° від початкового положення. З використанням рисунка мосту та з допомогою масштабу Google Maps записати рівняння параболи, яка описує пішохідну частину мосту.

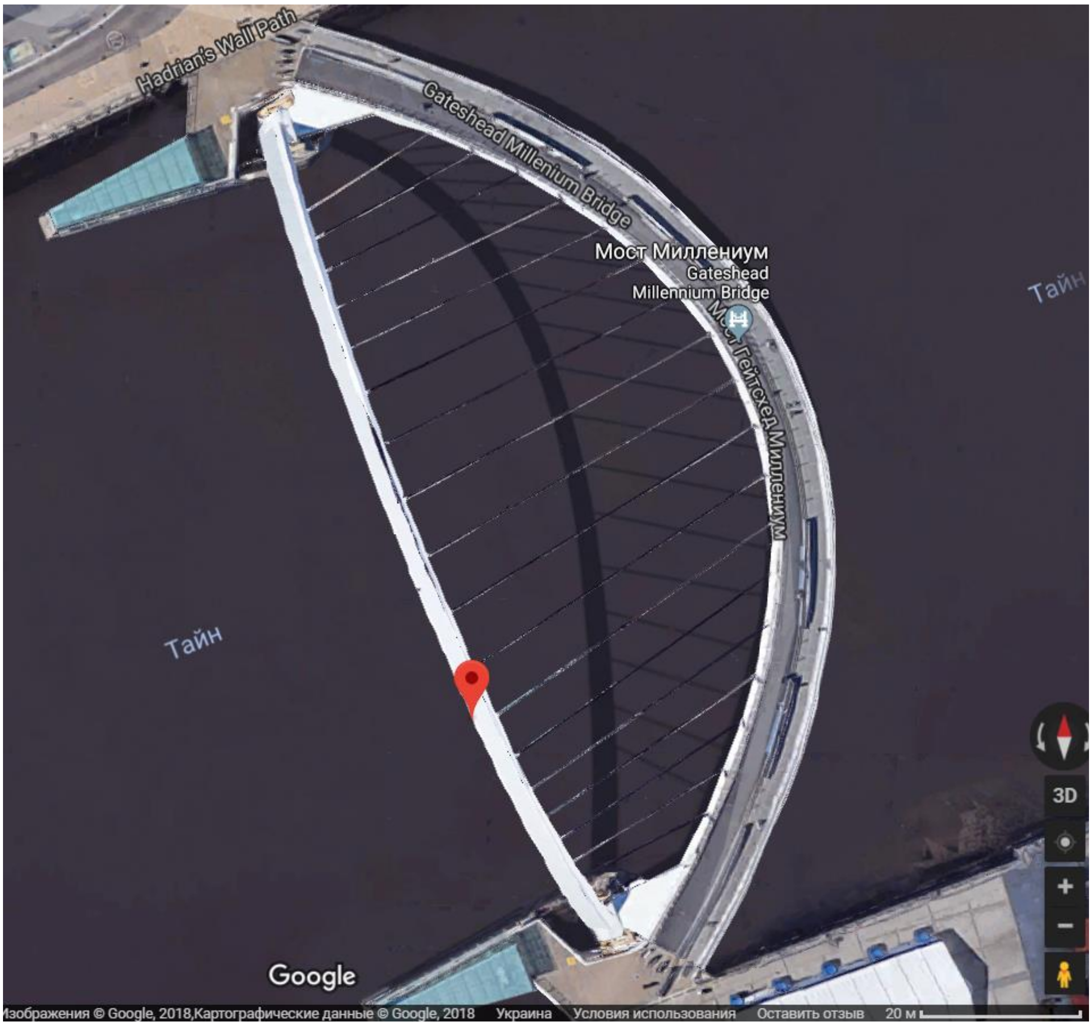
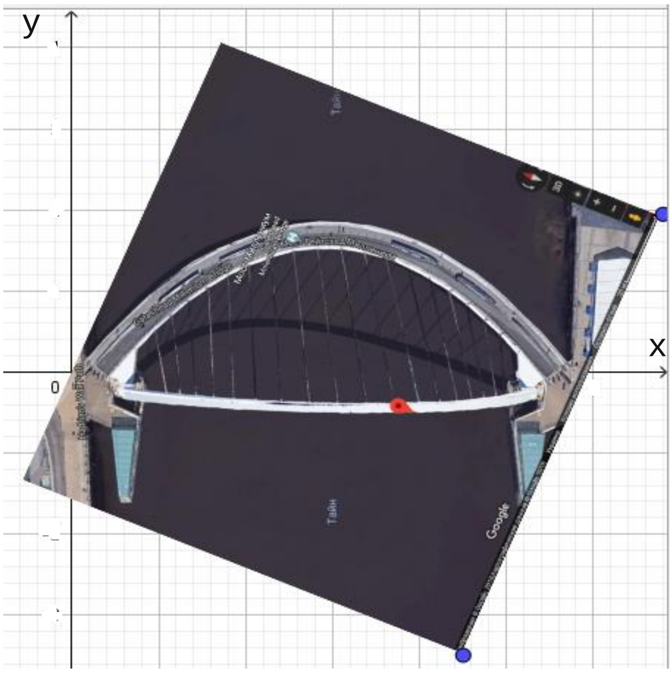


Рис. 2.54. Знімок з Google Maps

Розв'язання. Визначимо відстань між берегами, які з'єднує пішохідна частина мосту. Для цього використаємо масштаб Google Maps. Робимо виміри лінійкою й установлюємо, що 20 м становить 2,5 см, а відстань між берегами 15 см, тому реальна відстань між берегами становить близько 1200 м. Перенесемо зображений малюнок у прямокутну систему координат. Потрібно зробити знімок екрана Google Maps і зберегти його. Далі використаємо програмне забезпечення GeoGebra, а саме у вкладці Правка обираємо Вставити зображення з файлу (рис. 2.55).



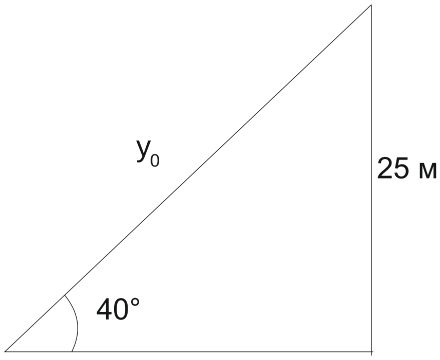


Рис. 2.55. Міст у прямокутній системі координат

Рис. 2.56. Переріз мосту

Відстань між вітками параболи по осі OX становить 1200 м, тому координата вершини параболи $x_0 = \frac{1200}{2} = 600$ м. Далі визначимо другу координату y_0, для цього розглянемо ситуацію з підйомом мосту на висоту 25 м під кутом 40° й зобразимо це окремо.

$y_0 = \frac{25}{\sin 40°} \approx \frac{25}{0,6427} \approx 38,89$ м. Для знаходження $\sin 40°$ можна використовувати таблиці Брадіса або калькулятор на мобільному телефоні.

Отримаємо $y = a \cdot (x - 600)^2 + 38,89$, тепер визначимо коефіцієнт a параболи. Для цього використаємо інформацію про точку перетину з віссю OY, це точка (0;0). Вона належить графіку функції, тому для неї виконується рівність: $0 = a \cdot (0 - 600)^2 + 38,89$, звідси $a = \frac{38,89}{600^2} \approx 10,8 \cdot 10^{-4}$.

Знаючи координати вершини параболи і напрям її віток (униз), відповідно до обраного початку координат запишемо рівняння параболи, яка описує пішохідну частину мосту. *Відповідь:* $y = -10,8 \cdot 10^{-4} \cdot (x - 600)^2 + 38,89$.

Задача № 5. Дано динамічну модель руху баскетбольного м'яча, кинутого під кутом до горизонту, у якій можна змінювати траєкторію польоту й кут кидання м'яча. За наведеними формулами (таблиця 40) установити, з якою швидкістю потрібно кинути м'яч, щоб він потрапив у сітку.

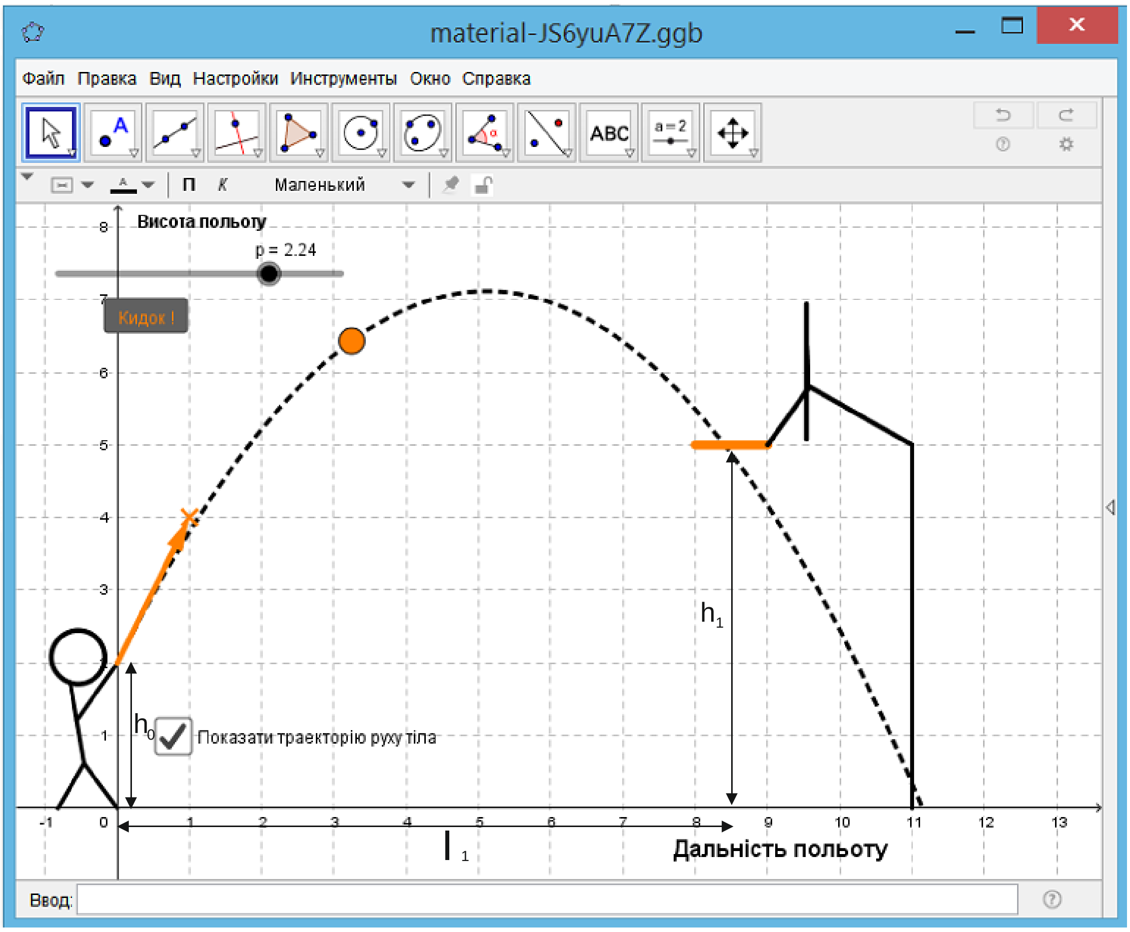


Рис. 2.57. Динамічна модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту

Таблиця 40

Відомості з курсу фізики про рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Формула	Основні компоненти
Висота, на якій розміщено баскетбольне кільце	
$h_1 = h_0 + v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}$ (1)	v_0 – швидкість тіла, α – кут, під яким кинули тіло, g – прискорення вільного падіння.
Відстань від спортсмена до баскетбольного кільця по горизонталі	
$l_1 = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$ (2)	v_0 – швидкість тіла, α – кут, під яким кинули тіло, t – час.

Розв'язання. Визначимо з відомостей таблиці 2 початкову швидкість м'яча v_0. Виразимо час t з формули (2): $\frac{l_1}{v_0 \cdot \cos\alpha} = t$, підставимо у формулу (1), тоді, $h_1 = h_0 + v_0 \cdot \frac{l_1}{v_0 \cdot \cos\alpha} \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{l_1}{v_0 \cdot \cos\alpha} \right)^2$,

$h_1 = h_0 + l_1 \cdot tg\alpha - \frac{g \cdot l_1^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$ (3). Виразимо з (3) швидкість тіла: $v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot l_1^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot (h_0 + l_1 \cdot tg\alpha - h_1)}}$, $v_0 = \frac{l_1}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2 \cdot (h_0 + l_1 \cdot tg\alpha - h_1)}}$ (4).

Тепер використаємо динамічну модель (рис. 2.57). Змінюючи повзунком параметри польоту й кут кидання м'яча, ми отримуємо різні числові дані для обчислень.

Завдання для учнів:

1. Користуючись моделлю, установити параметри польоту м'яча, а саме, змінюючи положення повзунка, простежити можливі траєкторії руху м'яча й установити кут кидання. Після задання параметрів виконуємо потрібні обчислення. Змінюючи параметри в програмі GeoGebra, ми кожного разу отримуємо різні значення, які підставляємо у формулу (4).

2. Спочатку визначимо α − кут, під яким кинули м'яч. Для цього розглянемо прямокутний трикутник з катетами 1 і 2, тоді гіпотенуза дорівнює $\sqrt{5}$, тому $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. За малюнком $h_0 = 2\ м$, $h_1 = 5\ м$, $l_1 = 8{,}5\ м$.

4. Підрахуємо, з якою швидкістю потрібно кинути м'яч відповідно до встановлених значень.

$$v_0 = \frac{8{,}5 \cdot 5}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{9{,}8}{2 \cdot (2 + 8{,}5 \cdot 2 - 5)}} = \frac{42{,}5}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{9{,}8}{2 \cdot (2 + 8{,}5 \cdot 2 - 5)}} = 42{,}5 \cdot \sqrt{0{,}07} = 4{,}25\sqrt{7}.$$

$v_0 \approx 11{,}24\ м/с$. *Відповідь:* м'яч потрібно кинути зі швидкістю $11{,}24\ м/с$.

Застосування GeoGebra в освітньому процесі сприяє кращому й глибшому засвоєнню навчального матеріалу, підвищенню інтересу до здобуття знань, демонстрації на практиці математичного моделювання реальних процесів і явищ.

Сучасний учитель не завжди має достатньо часу на те, щоб детально ознайомитися з новими програмними засобами, тому він може використовувати вже створені шаблони з різних розділів математики в ресурсах офіційного сайту www.geogebra.org або скористатися бібліотекою комп'ютерних моделей. У цих ресурсах поки що є незаповнені розділи, тому вчитель може створювати власні проєкти й поділитися своїми роботами.

2.5.2. Використання програмного забезпечення Smart Notebook

Зростання попиту ринку праці на професії, пов'язані з технологічним виробництвом (IT-фахівців, програмістів, інженерів, фахівців технологічного виробництва), вимагає від випускника школи сформованих умінь, пов'язаних з використанням у процесі навчання інформаційно-комунікаційних технологій, саме тому одним з пріоритетних освітніх завдань сучасної школи є фундаментальна підготовка учня з природничих, технологічних та математичних галузей знань. На сьогодні застосування інтерактивних програмно-технологічних прийомів і методів навчання в поєднанні з традиційними окреслює перспективи для якісного розв'язання завдань навчання, виховання й розвитку учнів, тому проблема використання інтерактивної дошки під час навчання є досить актуальною.

Упроваджувати технологію Smart Board (інтерактивна дошка) в освітній процес можна завдяки створенню власних навчальних комплексів або використання розроблених інтерактивних програм. Інтерактивна дошка дає змогу вчителеві робити матеріал візуально різноманітним і динамічним; регулювати темп подачі матеріалу; упроваджувати групові та індивідуальні форми роботи.

У низці наукових праць викладено результати дослідження інтерактивних засобів навчання [67; 88]; описано структуру, інструменти й призначення ІД [6; 87]; здійснено спробу обґрунтувати методику використання інтерактивних технологій в освітньо-виховному процесі [106; 145]; вивчено особливості використання ІД у закладах вищої освіти [131]; досліджено особливості формування в майбутніх учителів навичок використання ІД [185]; представлено методику використання прикладного програмного забезпечення в процесі роботи з ІД [20; 89]; подано особливості використання програм Smart-дошки під час вивчення різних предметів [156].

Уважаємо, що попри здійснені дослідження недостатньо вивченими залишаються окремі аспекти цієї проблеми, а саме: особливості використання технології Smart Board у процесі вивчення математики; прикладне програмне забезпечення, яке вдало поєднується з технологіями Smart Board у контексті вивчення окремих навчальних математичних тем.

На думку дослідників, основними характеристиками інтерактивної дошки є такі [18]: інтерактивність; мультимедійність; адаптивність; нелінійність подання інформації; індивідуальність дизайну; потреба в спеціальній підготовці до роботи з програмою.

Спеціалізоване програмне забезпечення для інтерактивної дошки об’єднує такі інструменти: Smart Notebook (електронний записник); Smart Recorder (засіб для здійснення відеозаписів); Smart Video Player (відеоплеєр); Floating Tools (інструменти маркерів); Smart Keyboard (віртуальна клавіатура). Однією з найважливіших переваг є її інтерактивність, яка виявляється в можливості рухати й змінювати об’єкти на сторінці та робити фото (світлини) робочої області. Ця програма дозволяє створювати та зберігати текстові записи; будувати малюнки до задач; вимірювати фігури та побудувати їх спеціальними вбудованими інструментами; записувати формули з використанням вбудованого редактора; посилатися на файли, програми, вебсторінки; складати таблиці, схеми, інтерактивні завдання. Особливість цієї програми полягає також у можливості створювати різні типи інтерактивних вправ, виконання яких можна перевірити автоматично або вчитель перевіряє їх самостійно.

Наведемо приклад інтерактивної вправи, створеної засобами Smart Notebook, застосовувати яку можна на етапі актуалізації опорних знань, що сприятиме реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри. Учитель може розробляти інтерактивні вправи завдяки вкладці Lesson Activity Toolkit 2.0 і шаблону з колекції Image match завдання (рис. 2.58). Тут потрібно встановити відповідність між картинкою й текстовою інформацією. Після натискання кнопки Check програма перевірить правильність виконання.

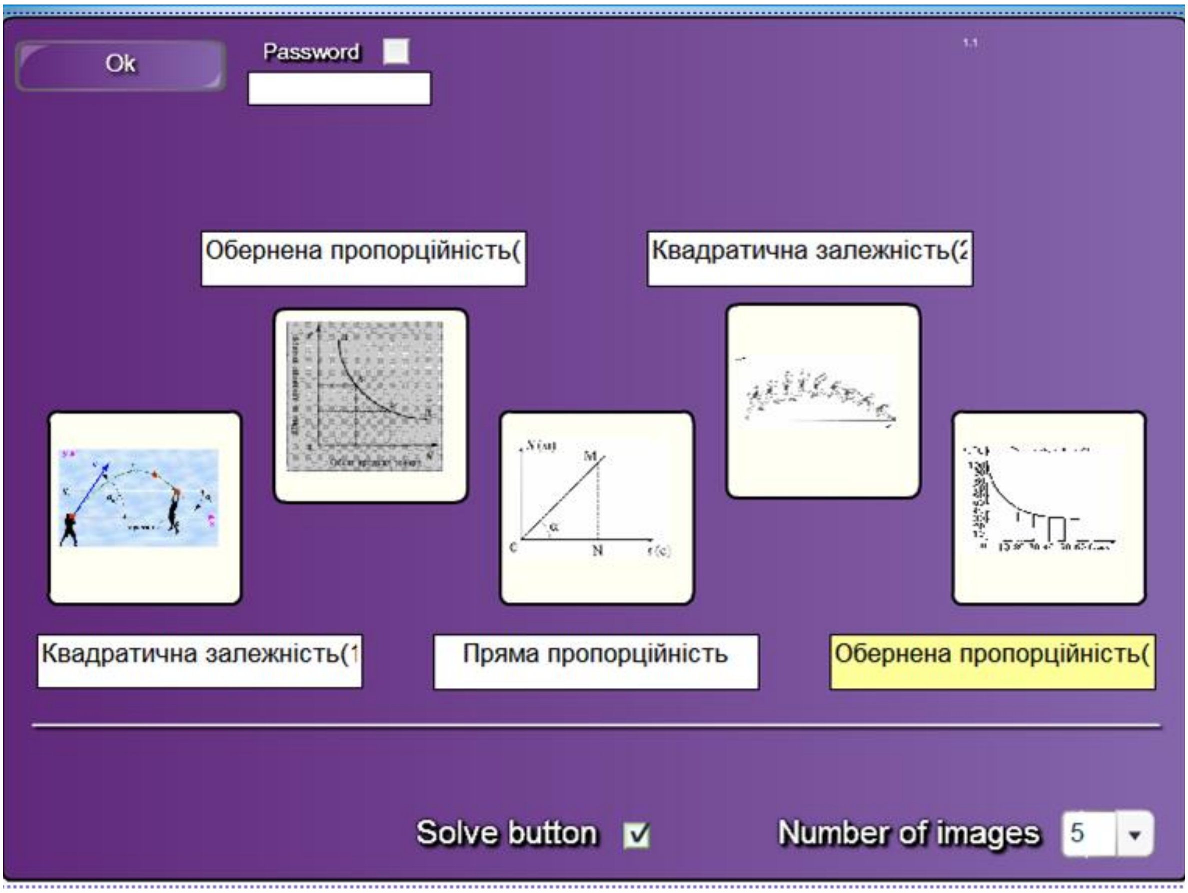


Рис. 2.58. Вигляд вікна для розробника

Інтерактивна вправа. Установити відповідність між процесом, зображеним на картинці, і типом функціональної залежності, яка його описуватиме (рис. 2.59).

Рис. 2.59. Вигляд вікна для учня

Одним з аспектів застосування програмного забезпечення Smart Notebook є забезпечення інтерактивності освітнього процесу під час розв’язування прикладних задач. Роботу над задачею розподілено на робочі сторінки (рис. 2.60).

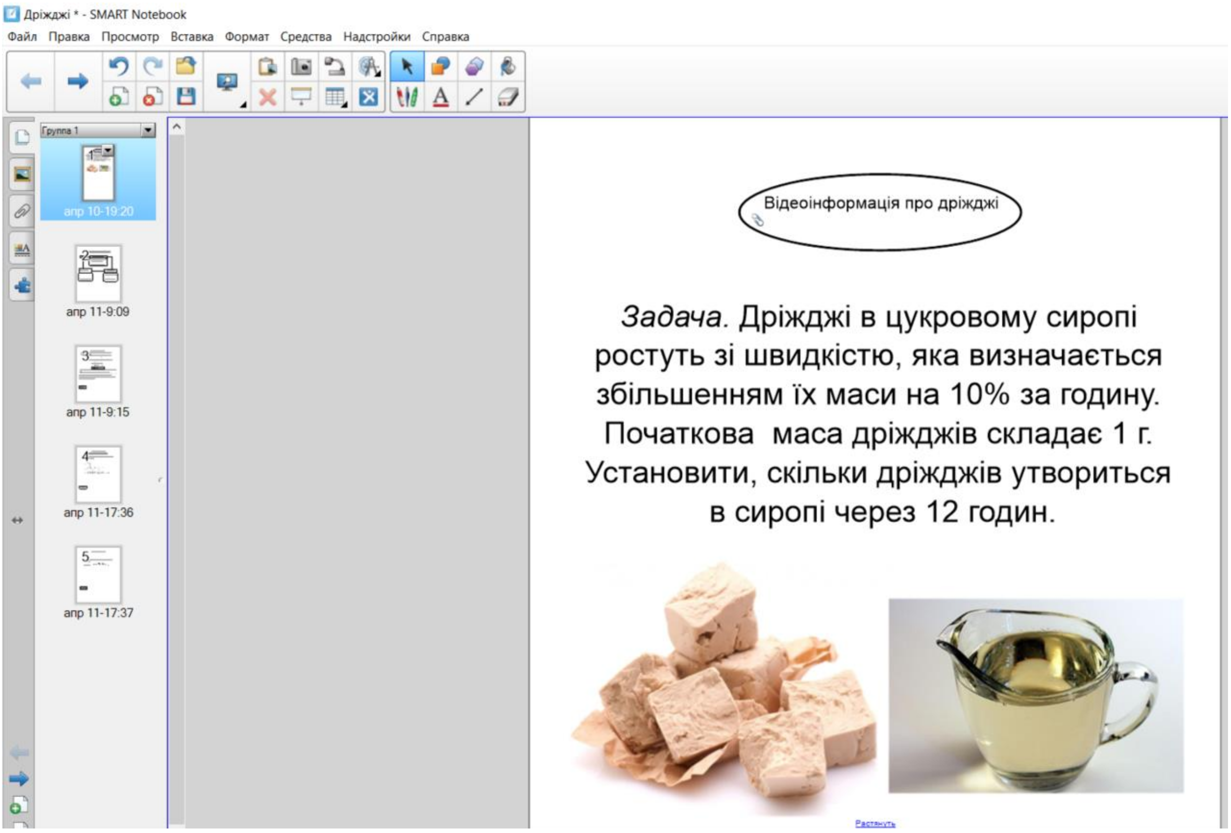


Рис. 2.60. Робоча область учителя в програмі Smart Notebook

На першій сторінці учні спочатку переглядають відео про дріжджі. Далі вивчають умову задачі, складають короткий запис. Друга сторінка демонструє етапи роботи над прикладною задачею (формалізація, дослідження математичної моделі, інтерпретація), учні використовують цю модель під час розв'язування прикладних задач.

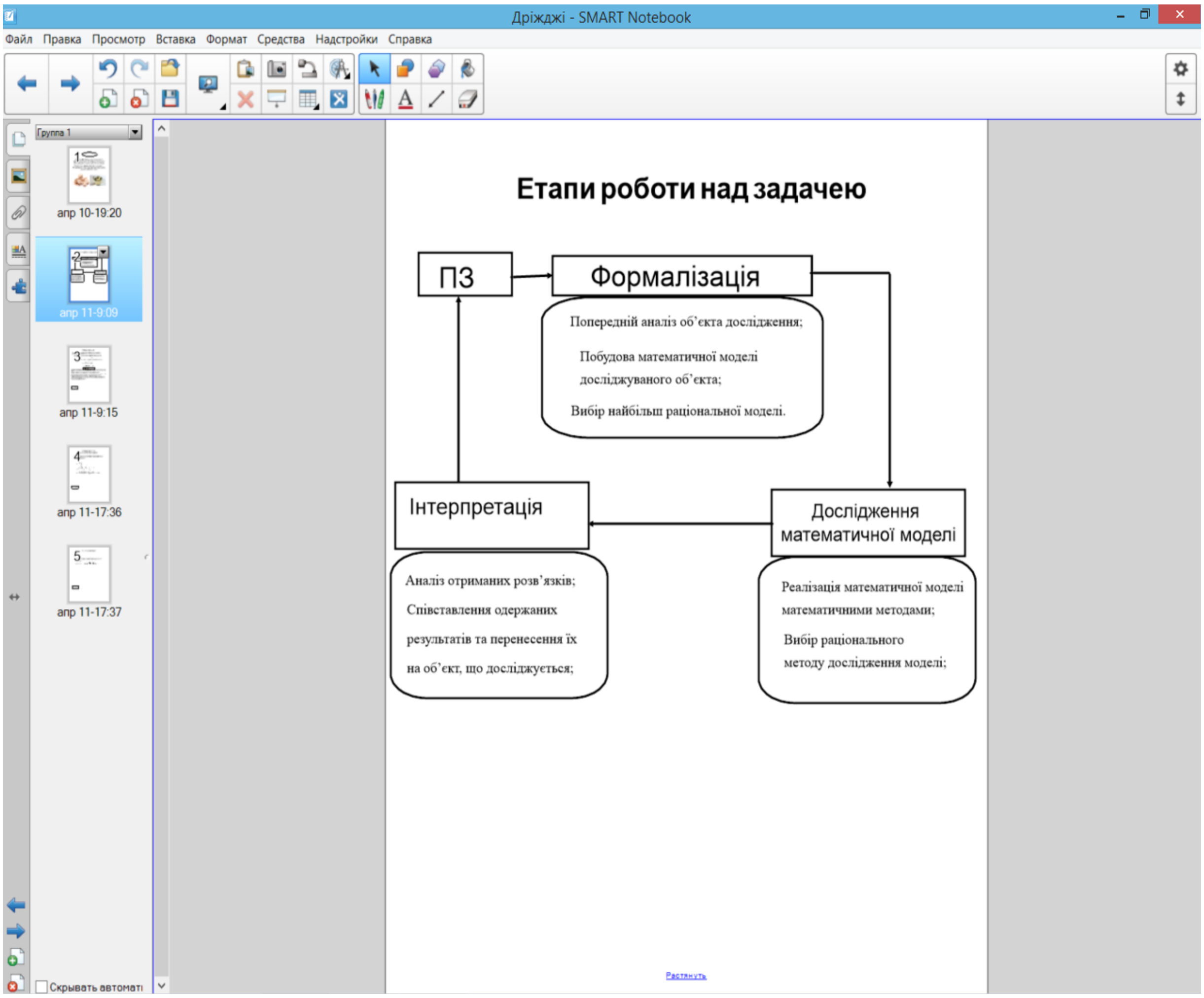


Рис. 2.61. Схема роботи над прикладною задачею

Особливість цієї інтерактивної схеми полягає в тому що, натискаючи на назви етапів, учні можуть перейти на реалізацію відповідного кроку розв'язування задачі й повернутися до схеми або до умови. У подальшому можна запропонувати учням самостійно створити такі інтерактивні моделі до інших прикладних задач.

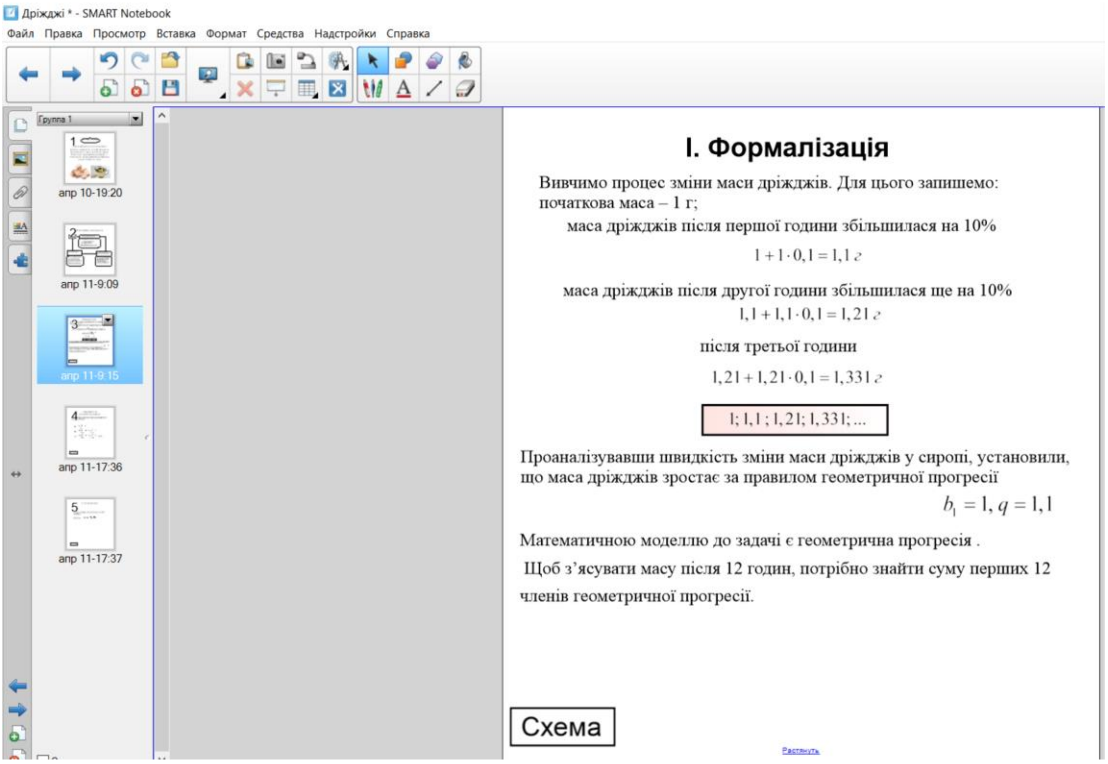


Рис. 2. 62. Етап формалізації при роботі над прикладною задачею

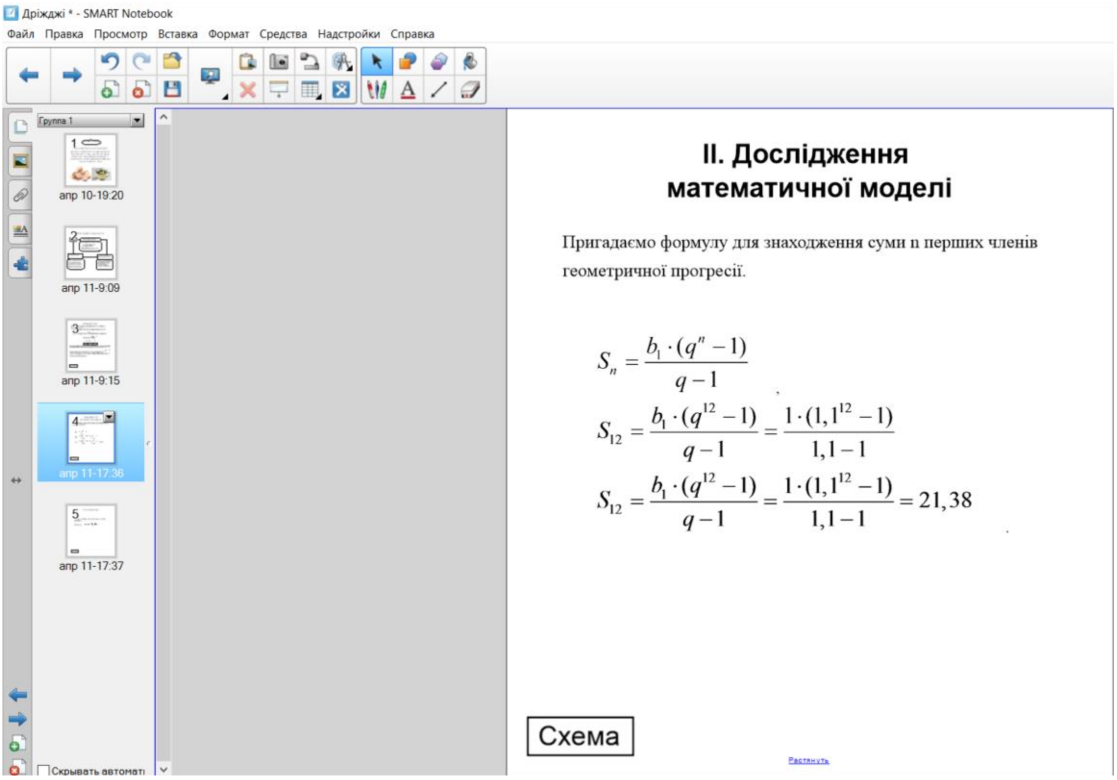


Рис. 2. 63. Етап дослідження математичної моделі до задачі

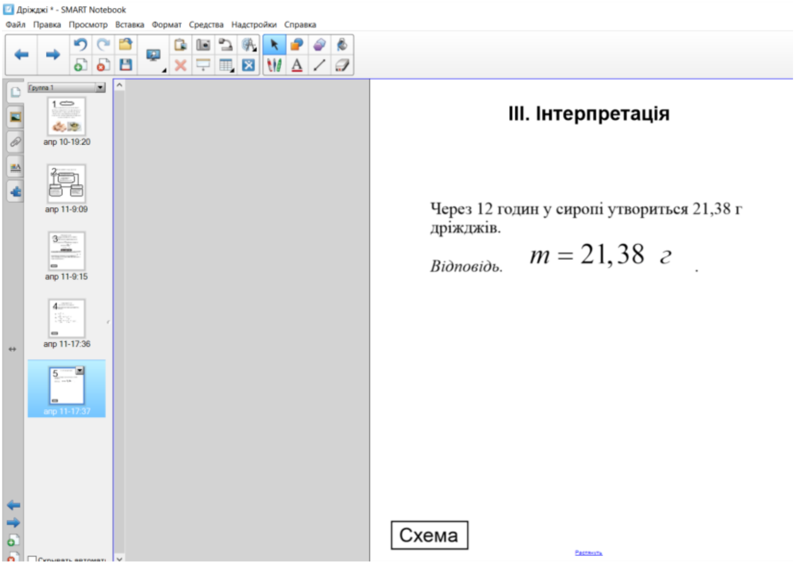


Рис. 2 64. Етап інтерпретації результатів розв’язування задачі

Ми продемонстрували роботу з програмою Smart Notebook, однак використання інтерактивної дошки цим не обмежується. За наявності доступу до мережі Інтернет можна використовувати набагато більше інших ресурсів, які розглянемо в наступному пункті підрозділу 2.5.

2.5.3. Використання Інтернет-ресурсів

У процесі дослідження для викладу навчального матеріалу й роботи над проєктами та прикладними задачами ми використовували такі ресурси: середовище для створення інтерактивних презентацій Prezi; хмари слів для візуального відтворення списку слів або міток у єдине зображення (Word It Out, Word Cloud Generation); середовище для створення буклетів, плакатів, презентацій (piktochart.com, canva.com); середовище для створення інтерактивних плакатів Glogster; сервіс для створення блогів Blogger та онлайн-дошку Padlet.com.

Інтерактивні плакати, онлайн-дошки та блоги учні активно використовували в процесі захисту проєктів для демонстрації результатів своєї дослідницької діяльності. Наприклад, під час виконання проєкту «Математичне моделювання дорожнього руху» (див. додаток Ж) було створено плакат рис. 2.65, а результати роботи учнів над проєктами до теми

«Застосування числових функцій в суміжних дисциплінах, житті та професійній діяльності» були розміщені на онлайн-дошці (рис. 2.66).

Рис. 2.65. Приклад плаката до проєкту, створений у середовищі Glogster

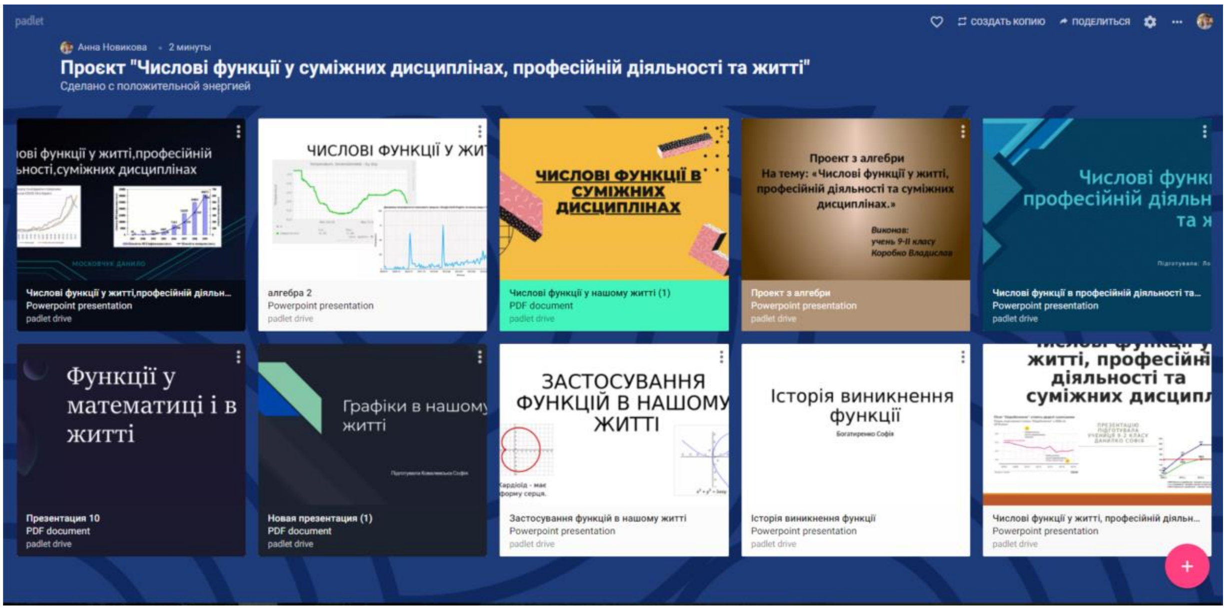


Рис. 2.66. Приклад онлайн-дошки створеної у Padlet

Для перевірки засвоєного матеріалу на різних етапах використовували також мобільне навчання, оскільки, з-поміж основних його переваг є такі: одночасна взаємодія з групою учнів; можливість динамічно генерувати навчальний матеріал залежно від способу використання мобільного пристрою; миттєвий зворотний зв’язок; активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Середовище Kahoot, яке містить частину безкоштовних компонентів, ми використовували на етапах перевірки базових знань учнів. Педагог може самостійно конструювати різні типи питань і форматів тестування. Схожим є сервіс для створення вікторин і домашніх робіт Quizalize. Результати представлено у вигляді панелей успішності учнів.

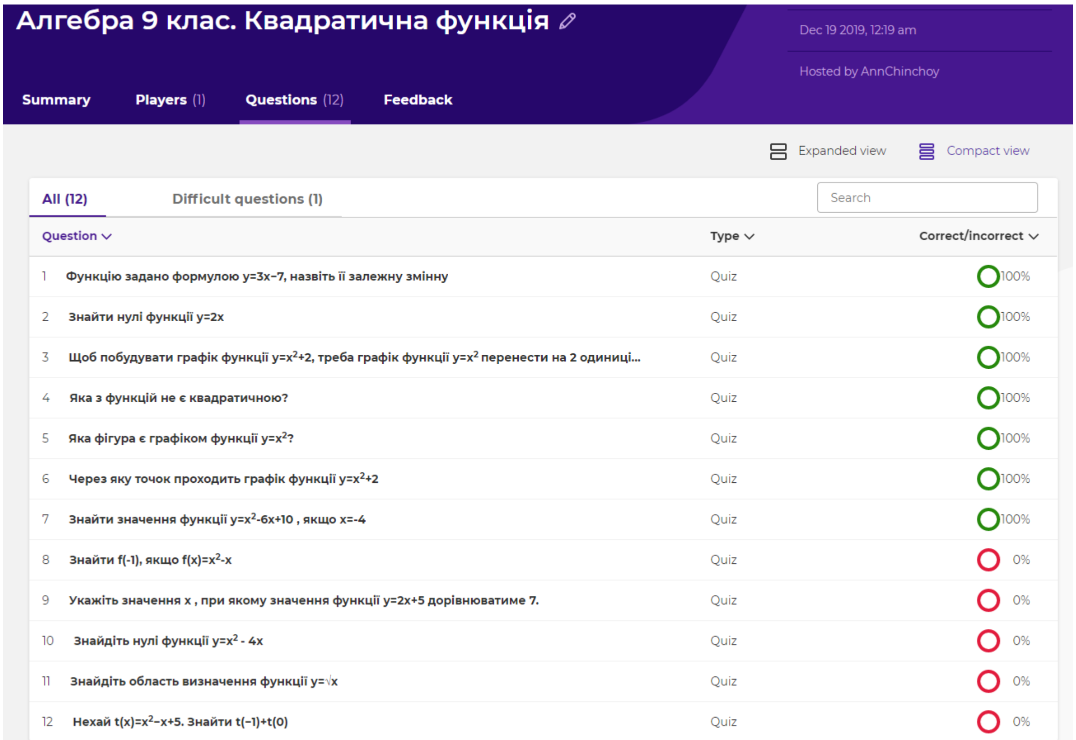


Рис. 2.67. Вікно програми Kahoot!

Програма *Plickers* потребує використання дошки для демонстрації запитань і планшета чи смартфона викладача для зчитування QR-коду з карток учнів. Карта в кожного учня своя, має чотири боки, де зазначено варіанти відповідей. Учень, відповідаючи, повертає картку потрібним варіантом відповіді, а вчитель зчитує її за QR-кодом мобільного додатка Plickers.

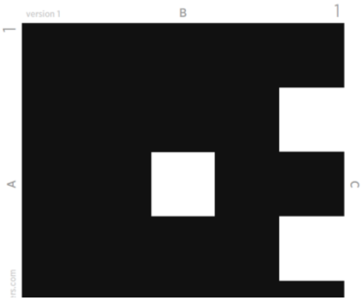


Рис. 2.68. Зразок картки для відповідей

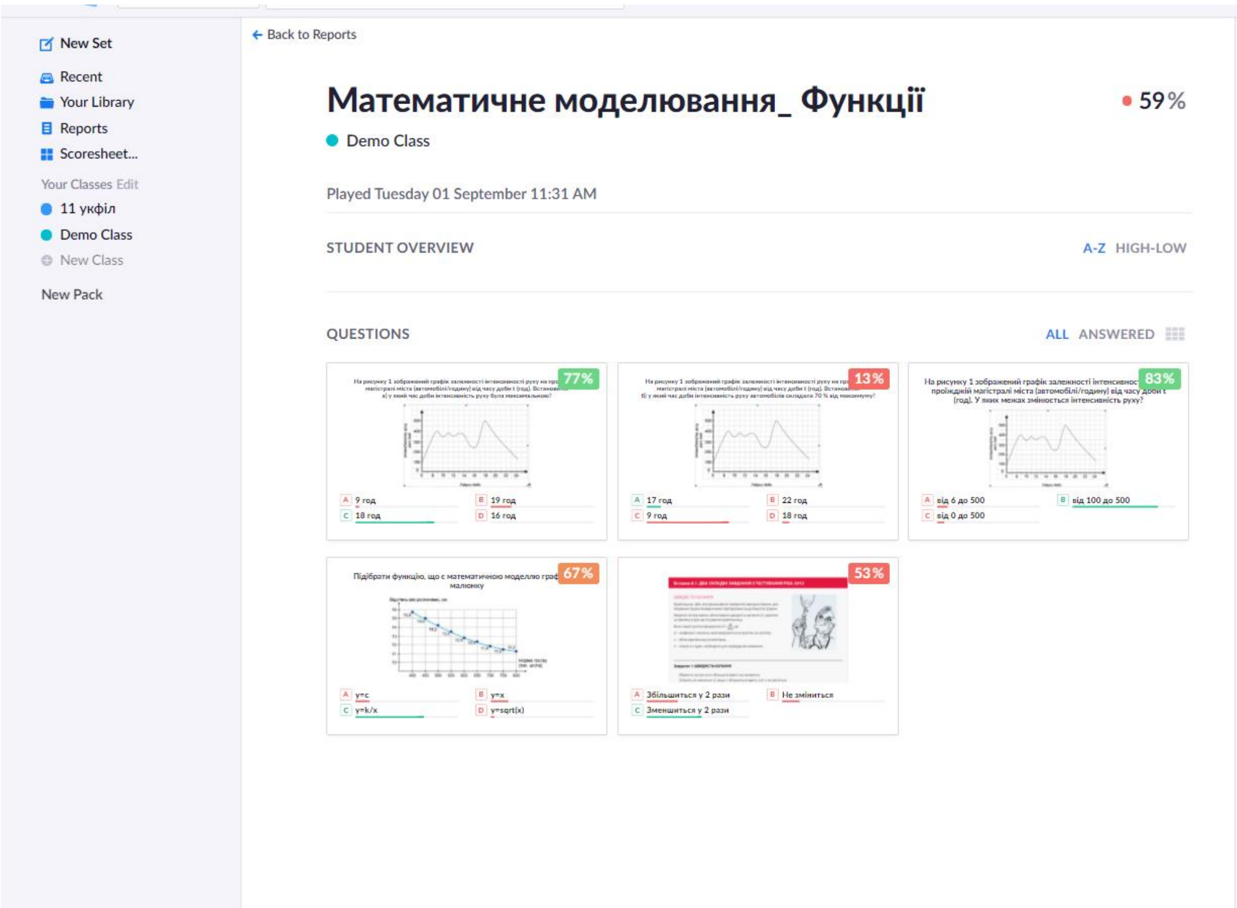


Рис. 2.69. Вікно програми Plickers

Після завершення тестування вчитель може подати результати в таблиці, або отримати інформацію про відповіді кожного учня на окремих аркушах.

Рис. 2.70. Використання програми Plickers на уроці

Name	Total	Математичне моделювання (Ви... Tuesday 11:16 AM • 53%					Математичне моделювання_ Фу... Tuesday 11:31 AM • 59%				
		Учні 10 класу зібрали 260 кг	У буфеті друзі купили кілька тістечок по	Якщо ціна паркету (p) пов'язана із	Image Only Question	Image Only Question	На рисунку 1 зображений графік	На рисунку 1 зображений графік	На рисунку 1 зображений графік	Підібрати функцію, що є математичнок	Image Only Question
Class Average	56%	93%	70%	50%	43%	10%	77%	13%	83%	67%	53%
Guest 1	40%	B	B	C	A	A	C	D	A	C	A
Guest 2	70%	B	D	C	A	C	B	C	B	C	C
Guest 3	30%	B	C	D	A	A	C	D	C	C	A
Guest 4	60%	B	A	B	B	A	C	C	B	C	C
Guest 5	30%	B	C	D	B	B	B	C	A	C	B
Guest 6	60%	B	D	C	B	B	C	C	B	D	B
Guest 7	50%	B	C	B	B	B	B	A	B	C	B
Guest 8	90%	B	D	C	B	C	C	C	B	C	C
Guest 9	40%	B	D	B	B	A	B	C	A	C	B
Guest 10	50%	B	B	D	A	B	C	C	B	C	C
Guest 11	60%	B	D	C	D	A	C	C	B	A	C
Guest 12	60%	B	D	A	B	B	C	C	B	B	C
Guest 13	40%	B	D	A	C	B	B	C	B	C	A
Guest 14	70%	B	D	B	B	D	C	C	B	C	C
Guest 15	50%	B	D	A	C	A	C	C	B	C	A
Guest 16	60%	A	D	B	B	D	C	C	B	C	C
Guest 17	40%	B	D	A	C	B	B	C	B	C	A
Guest 18	70%	B	D	C	B	A	C	C	B	B	C
Guest 19	40%	B	A	B	B	A	C	A	C	A	B
Guest 20	70%	B	D	A	C	C	C	C	B	C	C
Guest 21	60%	B	D	C	C	A	C	C	B	A	C
Guest 22	70%	B	D	C	A	D	C	A	B	B	C
Guest 23	80%	B	D	C	B	A	C	C	B	C	C
Guest 25	60%	B	D	C	C	A	C	C	B	A	C
Guest 27	70%	B	D	C	B	A	C	C	B	B	C
Guest 29	60%	B	D	C	A	D	C	C	B	C	A
Guest 31	40%	D	A	C	A	A	A	A	B	C	A
Guest 33	60%	B	D	C	C	D	C	C	B	C	A
Guest 37	67%	-	D	C	A	A	C	C	B	C	C
Guest 39	30%	B	B	D	D	A	C	C	B	B	A

Рис. 2.71. Таблиця результатів тестування

Використовуючи QR-коди можна створювати веб-квести. Зчитуючи код учні переходять за посиланнями до завдань, які подаються не лише текстом, а й відео, аудіо файлом (інструкцією).

У процесі дослідження ми дійшли висновку, що використання ІКТ для реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри в процесі формування в учнів умінь математичного моделювання має такі переваги: поліпшує навчальний процес; розширює міжпредметні зв'язки алгебри та інформатики на основі інтеграції знань під час виконання проєктів; забезпечує оптимізацію процесу розв'язування задач; сприяє підвищенню результативності учнів; стимулює й мотивує учнів до вивчення алгебри, забезпечує розвиток творчих здібностей; дає змогу учням отримати досвід роботи з різноманітними програмними засобами.

2.6. Організація, методика проведення та результати педагогічного експерименту

Для перевірки основних положень дисертації й визначення ефективності запропонованої методики формування вмінь математичного моделювання проведено експериментальне оцінювання. Педагогічний експеримент дозволяє не лише підтвердити чи спростувати окреслену на початку гіпотезу, а й оцінити вплив розробленої методики на процес навчання, спрогнозувати подальший її розвиток, виявити помилки та здійснити їх корекцію.

В експериментальній частині нашого дослідження передбачено оцінювання ефективності запропонованої методики формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання під час навчання алгебри. Для цього виконано такі ***завдання:***

1. Визначено роль математичного моделювання в процесі вивчення алгебри в основній школі.

2. Розроблено систему задач з алгебри для формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання.

3. Створено методичне забезпечення, зокрема добірку прикладних задач, упроваджено проєктне навчання, використано інформаційно-комунікаційні технології, завдання для діагностики й контролю успішності учнів.

4. Якісно та кількісно перевірено результативність запропонованої методики.

Порядок проведення педагогічного експерименту повністю відповідав складеній для нього програмі.

Програма педагогічного експерименту

1. Експериментальна база дослідження.

Для проведення експерименту залучено вчителів та учнів таких навчальних закладів: Комунального закладу «Ліцей «Науковий» Міської ради міста Кропивницького», Рівненської загальноосвітньої школи I-III ступенів № 6, Комунального закладу «Луцький навчально-виховний комплекс № 26 Луцької міської ради Волинської області», Комунального закладу «Навчально-виховний комплекс «Долинська гімназія – загальноосвітня школа I–III ступенів № 3 Долинської районної ради», Глухівської загальноосвітньої школи I–III ступенів № 1 Глухівської міської ради, Міжлиманська загальноосвітня школа I–III ступенів Біляївського району Одеської області.

У дослідно-експериментальній роботі взяли участь 896 учнів вищезгаданих шкіл. Під час експерименту здійснено спостереження за педагогічним та учнівським колективами, зафіксовано зміни їх ставлення до застосування в освітньому процесі математичного моделювання, проведено анкетування вчителів, здійснено моніторинг успішності школярів.

2. Характеристика засобів експерименту

Обрані засоби експериментальної роботи повністю відповідають поставленій меті та завданням дослідження, зокрема:

– аналіз спеціально складеної анкети та індивідуальних бесід з педагогами дозволяє отримати різнопланові відомості щодо ставлення вчителів до методів математичного моделювання та ступеня його використання в навчальному процесі;

– експериментальне навчання проведено в межах чинних навчальних планів та програм з урахуванням розроблених методичних рекомендацій;

– використані критерії діагностики рівнів засвоєння знань та сформованості вмінь математичного моделювання відповідають критеріям оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти.

3. Етапи проведення експерименту.

Проведений нами педагогічний експеримент складався з трьох етапів: констатувальний, пошуковий і формувальний, кожен з яких мав експериментальну та аналітичну стадії.

На *експериментальній стадії* передбачено підготовку потрібних матеріалів, для чого використано такі методи: анкетування; бесіди з учнями та вчителями; спостереження за освітнім процесом; опрацювання психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з проблеми дослідження, освітніх стандартів, програм, підручників і навчальних посібників з алгебри для учнів 7 – 9 класів загальноосвітніх шкіл, шкільної документації.

На *аналітичній стадії* кожного етапу експериментального дослідження вивчено, проаналізовано, порівняно, узагальнено й систематизовано отримані дані, що дало змогу скорегувати перебіг експерименту та розроблені методичні рекомендації.

Для забезпечення репрезентативності результатів дослідження в кожній школі обрано ***контрольні*** (надалі КК) та ***експериментальні класи*** (надалі ЕК) з урахуванням однорідності учнівського складу за такими показниками: інтерес до предмету та якісна успішність школярів. У цих класах, за змогою, навчання здійснював той самий вчитель. У КК застосовано традиційну методику навчання алгебри, в ЕК –ураховано запропоновані нами методичні рекомендації.

Оцінювання ефективності створеної методики формування в учнів основної школи знань, умінь та навичок математичного моделювання здійснено за такими показниками: відповіді учнів та вчителів на запитання, запропоновані в анкетах та під час індивідуальних бесід, рівень виконання учнями контрольних робіт.

Констатувальний експеримент

Констатувальний експеримент проведено у 2015–2016 рр. його мета – проаналізувати стан дослідженості проблеми реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри в психолого-педагогічній і навчально-методичній літературі, а також стан її реалізації в освітньому процесі; визначити засоби і методи реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри; створити систему задач для формування в учнів умінь і навичок математичного моделювання під час навчання алгебри в основній школі; експериментально перевірити ефективність запропонованої системи задач та узагальнити результати дослідження.

Аналіз результатів безпосереднього спостереження за освітньо-виховним процесом, проведеного анкетування вчителів та бесід з ними дає змогу стверджувати, що педагоги, визначають важливість та формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання, однак не здійснюють таку роботу систематично і цілеспрямовано; відчувають труднощі під час організації процесу; не мають потрібного дидактичного забезпечення. З огляду на це наша мета полягала в забезпеченні вчителів методичною літературою з питань математичного моделювання, зокрема в розширенні та урізноманітненні системи прикладних задач, створенні методичних рекомендацій щодо застосування математичного моделювання під час розв’язування прикладних задач, виконання навчальних проєктів та практичних робіт.

Для з’ясування причин, які здебільшого пояснюють негативне ставлення школярів до алгебри, і для встановлення труднощів, що виникають у процесі її вивчення, ми провели анкетування учнів. У ньому брали участь учні, яких об’єднали у дві групи залежно від того, люблять вони математику чи ні (див. додаток Й).

Унаслідок анкетування та бесід з учнями 7–9 класів загальноосвітніх шкіл, одержано такі результати:

1. Укажіть шкільний предмет (один), який, на ваш погляд, є найважливішим з-поміж інших шкільних предметів.

Математика (31%), українська мова (23%), іноземна мова (18%), інформатика (11%), біологія (6%), фізика (5%) історія і право (3%), хімія (2%), література (1%).

2. *Укажіть причину такого вибору.*

Не можу визначити (2%), розвиває (8%), потрібний для майбутньої професії (10%), потрібний для вступу та навчання у закладі вищої освіти (17%), є необхідним (63%).

3. Який предмет у школі подобається Вам найбільше?

Математика (31%), українська мова (23%), іноземна мова (18%), інформатика (11%), біологія (6%), фізика (5%) історія і право (3%), хімія (2%), література (1%).

4. Укажіть причину вибору.

Не можу визначити (2%), розвиває (6%), легко дається (10%), подобається, як викладає вчитель (17%), є цікавим (65%).

5. *Оцініть значущість математики для Вас у балах*: 0 балів – не потрібна ні сьогодні, ні в майбутньому (1%); 1 бал – потрібна лише для вступу (7%); 2 бали – потрібна для навчання в закладі вищої освіти (16%); з нею частково або повністю пов’язано майбутню професію (37%); 3 бали – нині є запорукою успішного майбутнього (39%).

6. Який математичний предмет – алгебра чи геометрія – подобається Вам більше? Укажіть одну причину.

Алгебра (81%), з-поміж причин учні вказували такі: цікаво розв’язувати задачі, легша, не можу визначити, цікавіша.

Геометрія (19%), з-поміж причин учні називали такі: цікаво будувати малюнки до геометричних задач, подобається доводити теореми, цікавіша.

7. *Чи можна використати алгебраїчні знання для інших шкільних предметів?* Якщо «так», то перерахуйте ці предмети. Фізика (65%), хімія (15%), біологія (5%), інформатика (15%).

8. *Чи пов'язані знання з курсу алгебри з реальним світом? Можливо, алгебра є суто абстрактною?* Так (89%), ні (11%).

9. *Чи використовуються знання з курсу алгебри в повсякденному житті?*

Так (78%), ні (12%).

10. *Як на Вашу думку, можна покращити вивчення алгебри в основній школі?* Не знаю (14%), цікавіший підручник (18%), цікавіше викладати (15%), використовувати ІКТ (24%), наводити приклади з життя (29%).

Як бачимо, результати анкетування вказують на потребу в пошуку нових форм, методів і засобів навчання алгебри, які дозволять організувати процес формування в учнів уміння математичного моделювання та активізувати пізнавальний інтерес до вивчення предмету.

Результати констатувального експерименту переважно представлено в розділі 1. Зупинимося детальніше лише на аналізі організованого анкетування.

Для виявлення проблем в учителів, пов'язаних з організацією навчання алгебри, спрямованого на формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання, застосовано такі методи: спостереження за освітньо-виховним процесом, індивідуальні бесіди й анкетування.

Унаслідок аналізу результатів анкетування здобуто такі дані:

1. *Як Ви розумієте прикладну спрямованість математики?*

Використання прикладних задач (45%), демонстрація зв'язків теорії з практикою (30%), уміння учнів досліджувати реальні явища засобами математики (25%).

2. Чи можна вважати прикладну спрямованість математики одним із шляхів розв'язання завдань, які сформульовано сьогодні в математичній освіті?

А) так (89%);

Б) ні (11%).

3. Які засоби її реалізації є найкращими?

А) приклади застосування теорії (5%);

Б) міжпредметні зв'язки (25%);

В) прикладні задачі (45%).

Г) показ реальності походження алгебраїчних абстракцій (14%)

Д) комплексне використання вказаних засобів (11%)

4. Чи використовуєте Ви у своїй діяльності прикладні задачі?

А) так (10%);

Б) ні (55%);

В) іноді (35%).

5. Чи потрібно розв'язувати прикладні задачі на уроках алгебри? Чому?

А) так (45%);

Б) ні (6%);

В) іноді (49%).

6. Укажіть, будь ласка, джерела прикладних задач курсу алгебри, які Ви використовуєте.

А) чинний підручник (20%);

Б) підручники попередніх років (35%);

В) збірники задач (5%);

Г) інше (пошук інформації в мережі Інтернет, зарубіжні підручники) (40%).

7. Чи потрібно передбачати прикладні задачі для оцінювання навчальних досягнень учнів?

А) так (67%);

Б) ні (33%).

8. Чи використовуєте Ви прикладні задач у процесі вивчення курсу алгебри ?

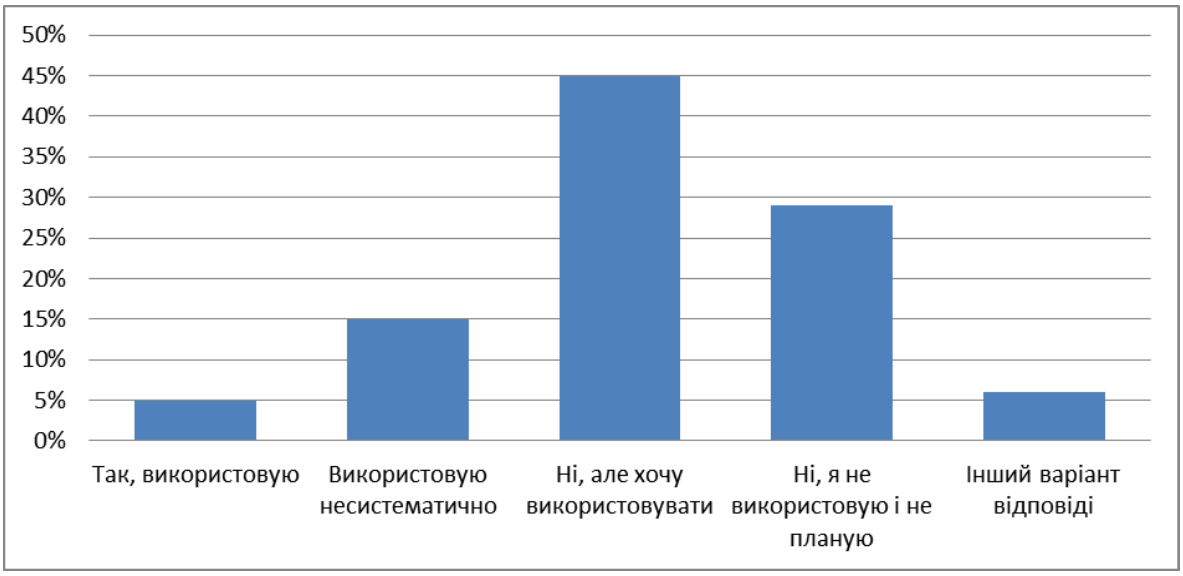


Рис. 2.72. Результати опитування вчителів щодо використання прикладних задач на уроках алгебри

9. Чи потрібно передбачати прикладні задачі для складання ЗНО?

А) так (65%);

Б) ні (35%).

З-поміж альтернативних підручників і методичних посібників, у яких розглянуто питання застосування математичного моделювання, учителі були виокремили такі: Бевз Г. П. Алгебра: Підруч. для 7–9 кл. (42,3%), Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підруч. для 9 кл. (29,4%) та ін., однак при цьому багато педагогів звернули увагу на потребу в додатковому забезпеченні.

Пошуковий експеримент

Аналіз результатів констатувального експерименту дозволив визначити *напрям пошукового: створити систему прикладних задач для формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання. Пошуковий експеримент проведено у 2016–2017 рр.*

Для досягнення поставленої мети вивчено й проаналізовано науковометодичну, психолого-педагогічну, та математичну літературу, власний досвід викладання в школі й спостереження за діяльністю колег. Одним з результатів такої роботи стало з'ясування потреби в комплексному розв'язанні окресленої проблеми, зокрема визначення концептуальних положень, створення дидактичного забезпечення та розроблення ефективної методики їх використання. Сформульовано загальну гіпотезу, складено план опрацювання й перевірки цієї гіпотези, визначено мету, завдання, предмет та об'єкт дослідження.

Для створення методики формування в учнів умінь математичного моделювання окреслено її основні положення, зокрема цілі та завдання; зміст навчального матеріалу та його структурування; методи, прийоми, організаційні форми дидактичні засоби навчання (див. 1.2, 1.3). Ці компоненти визначено в процесі всебічного аналізу наукової думки, досвіду вітчизняних та зарубіжних педагогів, психологів, дидактів, досвідчених учителів математики.

Отже, під час пошукового експерименту досягнуто таких результатів:

1. Сформульовано конкретні методичні рекомендації для навчання учнів елементів математичного моделювання на кожному з виокремлених етапів.

2. Розроблено дидактичні матеріали, які було використано під час проведення експериментального навчання (добірка прикладних задач для курсу алгебри та навчальні проєкти).

3. Визначено в кожній школі КК та ЕК.

4. Проведено навчальні бесіди з учителями, що викладатимуть математику в ЕК.

Формувальний експеримент

Третій етап педагогічного експерименту найбільш інтенсивно проведено з 2018 по 2020 рр. та продовжено й нині для розв'язання таких завдань:

1. Реалізувати методику формування в учнів основної школи вмінь *математичного моделювання завдяки організації розв'язування низки завдань для формування конкретних умінь математичного моделювання, прикладних задач, виконанню навчальних проєктів, опрацюванню додаткової літератури.*

2. Оцінити вплив запропонованої методики на процес формування в учнів знань, умінь та навичок математичного моделювання.

3. Оцінити ефективність експериментальної методики порівняно з традиційною.

Для проведення формувального експерименту ми обрали 7-мі, 8-мі та 9-ті класи Навчально-виховного об'єднання І–ІІІ ступенів «Науковий ліцей» міської ради міста Кропивницького Кіровоградської області», Рівненської загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 6, комунального закладу «Луцький навчально-виховний комплекс № 26 Луцької міської ради Волинської області», комунального закладу «Навчально-виховний комплекс «Долинська гімназія – загальноосвітня школа І–ІІІ ступенів № 3 Долинської районної ради», Глухівської загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 1 Глухівської міської ради, Міжлиманської загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів Біляївського району Одеської області.

Експериментальне навчання проведено в межах чинних навчальних планів з урахуванням розробленої нами методики, яка передбачала розв'язування системи прикладних задач та виконання навчальних проектів (матеріали розміщено на ресурсі http://mathematics-art-chinchoy.blogspot.com/p/blog-page_3.html), що органічно поєднувалося з прийнятою традиційною структурою уроків за чинними підручниками з алгебри (рис. 2.73).

Діагностичні ***контрольні роботи*** (надалі КР) проведено на початку навчального року в 7-их, 8-их і 9-их класах, а підсумкові КР – у кінці навчального року.

Для отримання результатів використано розроблені нами варіанти контрольних завдань, спрямованих на з'ясування рівня сформованості вміння математичного моделювання.

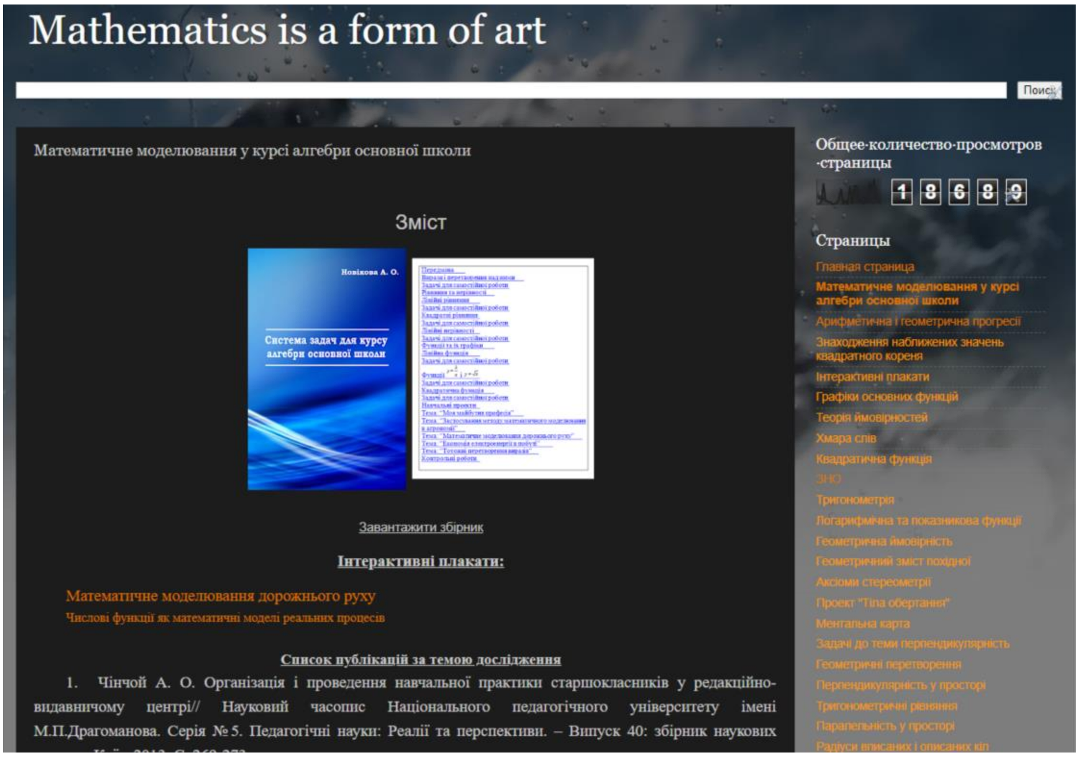


Рис. 2.73. Дидактичні матеріали для проведення експериментального навчання

У діагностичній роботі запропоновано чотири задачі й розраховано максимальну кількість балів за кожну розв'язану задачу (див. табл. 41).

Таблиця 41

Нарахування балів за відповідними критеріями

Номер задачі / **Критерії**	№1	№2	№3	№4
Отримано правильну відповідь і наведено повне обґрунтування	1	2	2	3
Отримано правильну відповідь, однак наявні незначні недоліки або її недостатньо обґрунтовано	0	1	1	2
Отримано лише частину правильної відповіді	0	0	0	1
Задачу розв'язано неправильно	0	0	0	0

Таблиця 42

Розподіл за рівнями сформованості вміння математичного моделювання залежно від набраних балів

Рівень сформованості вміння	**Кількість балів**
Низький	0 – 2
Середній	3 – 4
Високий	5 – 6

Для дослідження сформовано однорідні вибірки експериментальних та контрольних класів учнів для проведення формувального експерименту.

Таблиця 43

Розподіл учнів за класами, експериментальними та контрольними групами

Класи	7-мі	8-мі	9-ті	Разом (учнів)
Експериментальні	148	147	154	449
Контрольні	150	145	152	447
Разом (учнів)	298	292	306	896

Під час розподілу учнів на експериментальні та контрольні групи на початку формувального експерименту враховано рівні навчальних досягнень учнів за попередньою темою. Проведено діагностичні контрольні роботи, результати яких віддзеркалено в таблиці 44.

Таблиця 44

Результати діагностичних робіт у КГ та ЕГ

Вибірки	*КГ*	*КГ (%)*	*ЕГ*	*ЕГ (%)*
Низький	114	25,5	109	24,2
Середній	216	48,3	219	48,7
Високий	117	26,1	121	26,9
Разом (896 уч.)	447		449	

Вибірки учнів КГ та ЕГ випадкові та незалежні, з однаковим розподілом учнів за успішністю навчання на початок експерименту. Визначені в нашому дослідженні три рівні сформованості вміння математичного моделювання (низький, середній та високий) задовольняють умови для порівняння результатів з використанням статистичного критерію Пірсона χ^2 [43, с. 96].

Використання критерію χ^2 передбачає порівняння двох емпіричних розподілів для вибірок більше 50 та порівняння табличного значення критерію й одержаного під час спостереження, на основі чого, ми робимо висновок про специфіку розбіжностей у розподілі учнів за обраною ознакою. Чим більша розбіжність між $\chi^2_{спост.}$ та $\chi^2_{крит}$, тим суттєвішими є розбіжності в розподілах навчальних досягнень учнів КГ та ЕГ.

Сформулюємо гіпотези. H_0 емпіричні розподіли за рівнями успішності в контрольних та експериментальних класах не відрізняються. H_1 емпіричні розподіли за рівнями успішності в контрольних та експериментальних класах відрізняються.

Для перевірки гіпотези H_0 підраховуємо значення статистики критерію χ^2 за такою формулою: $\chi^2 = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_1 Q_{2i} - n_2 Q_{1i})^2}{Q_{1i} + Q_{2i}}$, де n_1 – обсяг першої вибірки, де n_2 – обсяг другої вибірки, k – кількість категорій, Q_{1i}, Q_{2i} – кількість учнів першої та другої вибірки відповідно, яких розподілено до категорії k.

Розраховуємо значення χ^2 до початку експерименту, для $k = 2$: $\chi^2_{сп} \approx 0{,}195$. За статистичними таблицям для рівня значущості α=0,01 і числа ступенів вільності К=*i*-1=2 знаходимо критичне значення статистики критерію $\chi^2_{крит}$=9,210. Отримали $\chi^2_{сп} < \chi^2_{крит}$, що є основою для відхилення гіпотези H_1 і прийняття H_0. Це дає підстави стверджувати, що суттєвих розбіжностей в успішності контрольних та експериментальних груп учнів на початку експерименту немає.

Уроки в контрольних та експериментальних класах проведено й одним учителем, і різними. Кількісні показники рівня сформованості вміння математичного моделювання в учнів експериментальної й контрольної груп орієнтовно на одному рівні.

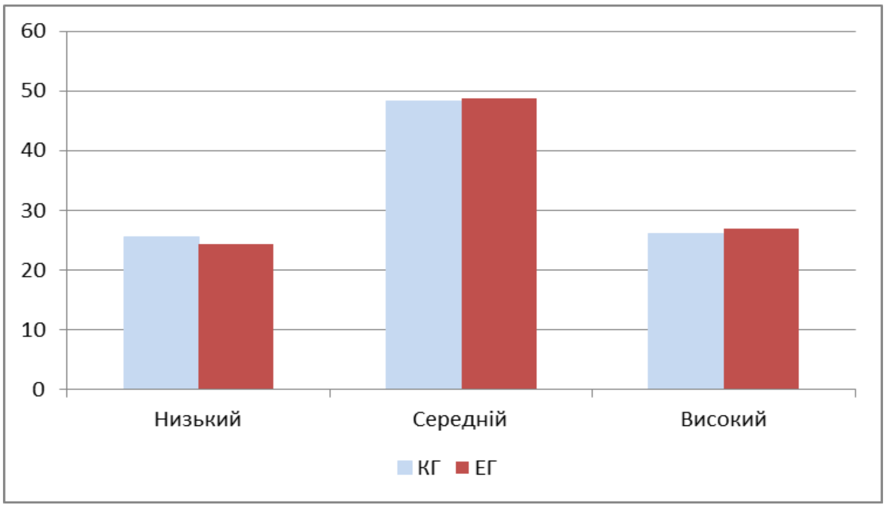


Рис. 2.74. Емпіричне значення статистики на початку експерименту (у%)

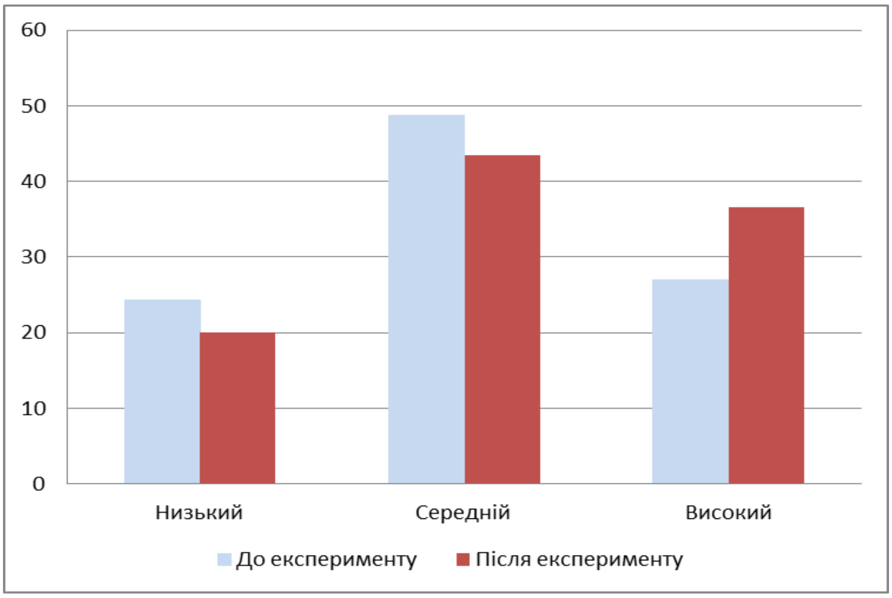


Рис. 2.75. Динаміка змін рівнів успішності учнів основної школи в ЕГ (у%)

Таблиця 45

Результати контрольних робіт в КГ та ЕГ

Вибірки	*КГ*	*КГ (%)*	*ЕГ*	*ЕГ (%)*
Низький	126	28,2	90	20,0
Середній	217	48,5	195	43,4
Високий	104	23,3	164	36,5
Разом (896 уч.)	447		449	

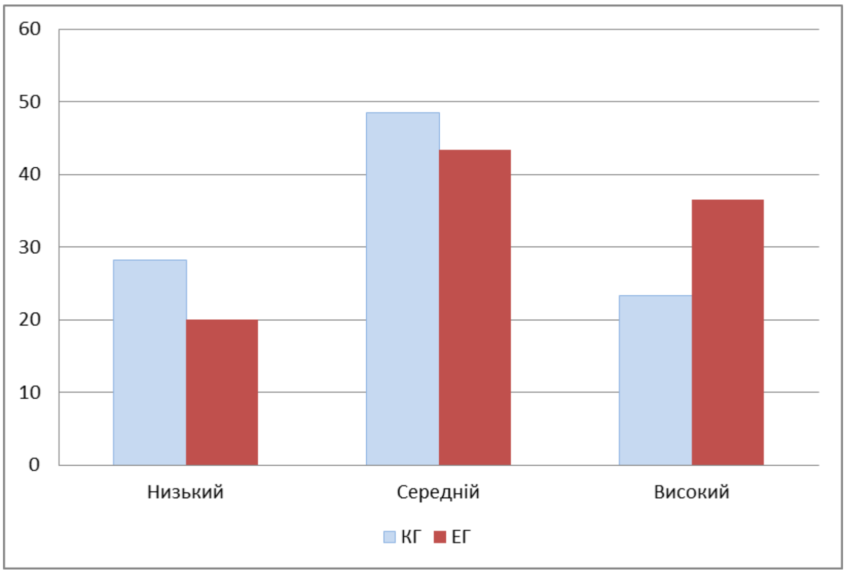


Рис. 2.76. Емпіричне значення статистики після експерименту (y%)

Показник успішності учнів експериментальної групи з математики зріс порівняно з контрольними групами. Зокрема кількість учнів експериментальної групи, які володіють високим рівнем навчальних досягнень з математики зросла на 9,6%. Відбувся значний статистичний перерозподіл на низькому та середньому рівнях. Зменшилася кількість учнів з низьким рівнем навчальних досягнень з математики на 4,2%.

Сформулюємо гіпотези. H_0 емпіричні розподіли за трьома позиціями нарахованих балів контрольної роботи в контрольних та експериментальних класах не відрізняються. H_1 емпіричні розподіли за трьома позиціями нарахованих балів контрольної роботи в контрольних та експериментальних класах відрізняються.

Нульову гіпотезу перевіряємо за допомогою критерію Пірсона χ^2. Для цього результати письмової роботи представляємо в таблиці, у якій подано дві вибірки (n_1=447, n_2=449 і три категорії (i = 3): $\chi^2_{cn} \approx 20,6$.

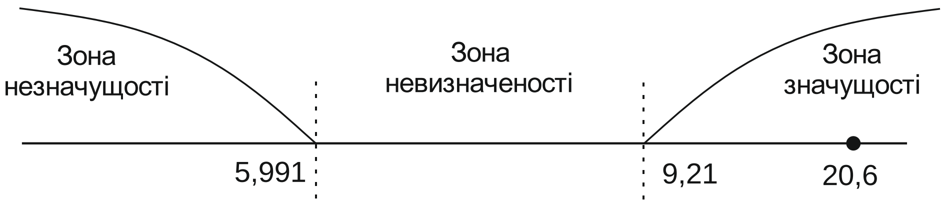


Рис. 2.77. Емпіричне значення статистики після експерименту (y%)

За статистичними таблицями для рівня значущості α=0.01 і числа ступенів вільності К=i-1=2 знаходимо критичне значення статистики критерію $\chi^2_{крит}$=9,21. Отримали χ^2> $\chi^2_{крит}$ (20,6>9,21), що є основою для відхилення нульової гіпотези на користь альтернативної про вплив розробленої системи прикладних задач та методики її використання на формування в учнів умінь математичного моделювання.

Отже, аналіз результатів усіх етапів проведеного експерименту дозволяє стверджувати, що розроблена методика формування вмінь математичного моделювання є ефективною й сприяє активізації пізнавального інтересу до вивчення алгебри та підвищенню рівня навчальних досягнень школярів.

Висновки до розділу ІІ

У розділі представлено методику використання системи прикладних задач з алгебри для формування вміння математичного моделювання в учнів основної школи. Базовими компонентами моделі формування вмінь математичного моделювання є цільовий, змістовий, діяльнісний та контролювальний.

Цільовий компонент спрямовано на формулювання навчальних цілей з формування вміння та забезпечення відповідної мотивації. Змістовий компонент зумовлює вдосконалення навчального матеріалу відповідно до вміння математичного моделювання. У межах компонента передбачено сприйняття та запам’ятовування, застосування за зразком, творче використання в невідомій ситуації. Діяльнісний компонент моделі формування вмінь математичного моделювання спрямовано на вивчення досвіду навчальної діяльності та належну її організацію вчителем. Рівні сформованості вміння математичного моделювання віддзеркалено в сутності вміння (побудова моделі, виокремлення характеристик моделі, установлення системи відношень, контроль відповідності отриманого результату меті побудови моделі). Контролювальний компонент забезпечує діагностику рівня сформованості вміння математичного моделювання (низький, середній, високий) за відповідними критеріями, у яких враховано повноту, самостійність, усвідомленість виконуваних дій.

Формувати вміння математичного моделювання в учнів основної школи доцільно з використанням ІКТ, що дає змогу учням самостійно створювати, спостерігати, досліджувати математичну модель явища, яке описано в прикладній задачі: педагогічні програмні засоби (GeoGebra), Інтернет-ресурси (Blogger.com та інші Google продукти, wikipedia, Glogster, Plickers, Kahoot, Piktochart.com), інтерактивна дошка та її програмне забезпечення (Smart Board) і програми пакету Microsoft Office (Power Point, MS Word, MS Excel). У дослідженні ми представили зразки використання інформаційно-комунікаційних технологій під час розв’язування прикладних задач та виконання навчальних проєктів.

Розроблену методику формування вмінь математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання алгебри апробовано в процесі проведення педагогічного експерименту, у якому передбачено три етапи.

Результати констатувального експерименту, що відбувався у 2015–2016 рр. та передбачав вивчення математичного моделювання під час навчання алгебри учнів основної школи й визначення готовності школярів та педагогів до застосування математичного моделювання в освітньо-виховному процесі, указували на важливість пошуку нових форм, методів і засобів навчання алгебри, які дають змогу організувати формування вмінь та навичок математичного моделювання.

Під час пошукового експерименту, який проведено у 2016–2017 рр., складено модель формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання й створено систему прикладних задач до тем: «Вирази і перетворення над ними», «Рівняння і нерівності», «Функції та їх графіки».

Отримані результати контрольних робіт, достатня вибірка та застосування методів математичної статистики для опрацювання результатів під час формувального експерименту (2018–2020 рр.) дозволяють стверджувати, що розроблена методика формування в учнів основної школи вміння математичного моделювання під час розв'язування системи задач сприяє глибшому засвоєнню навчального матеріалу; активізації пізнавального інтересу та залученню учнів до самостійної пізнавальної діяльності; активному розвитку вмінь узагальнювати, абстрагувати, аналізувати та синтезувати в процесі роботи над задачею.

Основні наукові результати другого розділу опубліковано в працях: [116], [121], [122], [125],[126], [128], [129], [187], [192], [197].

ВИСНОВКИ

Відповідно до поставленої мети та визначених завдань дослідження отримано такі результати:

– з’ясовано стан розв’язання проблеми в науково-методичній, психолого-педагогічній, математичній літературі та рівень її практичної реалізації в навчанні математики в школі;

– окреслено психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання під час розв’язування задач;

– створено добірку задач прикладного змісту для формування в учнів основної школи вмінь математичного моделювання;

– визначено, теоретично обґрунтовано та розроблено методичне забезпечення процесу формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання, зокрема запропоновано метод проєктів, навчальну практику та практичні роботи, задачі прикладного змісту;

– проведено експериментальну перевірку ефективності розробленої методики формування вмінь математичного моделювання в учнів основної школи під час навчання алгебри.

Результатом упровадження цієї методики є позитивна динаміка рівнів навчальних досягнень учнів з алгебри та підвищення інтересу вивчення предмету. Отримані результати дослідження дають підстави сформулювати такі **висновки**:

1. Проведений аналіз стану досліджуваної проблеми в науково-методичній, психолого-педагогічній, математичній літературі та рівень її практичної реалізації в навчанні математики в школі дозволяє стверджувати, що брак навчального часу, відсутність систематизованого методичного матеріалу, недостатня кількість дидактичних матеріалів на складання й розв’язування задач методами математичного моделювання, відсутність розроблених критеріїв рівня сформованості вмінь математичного моделювання та способів їх визначення вказує на епізодичність застосування

математичного моделювання в освітньому процесі, що не дає змоги повною мірою забезпечити засвоєння учнями прикладних аспектів математики.

2. У теорії та методиці навчання математики потрібно вживати такі тлумачення понять:

– *прикладна спрямованість шкільного курсу математики* – це зорієнтованість змісту й цілей освітньої діяльності на підготовку учнів до використання математичних знань і вмінь, специфічних мисленнєвих дій та індивідуальних особливостей під час вивчення суміжних дисциплін, у майбутній професійній діяльності, у житті.

– *прикладна спрямованість навчання математики* – це формування уявлень про взаємозв'язок математики із суміжними дисциплінами та особливості використання математичних методів для їх вивчення і знань про сфери діяльності, у яких застосовується математика; зорієнтованість методів, організаційних форм, засобів навчання на формування вмінь застосовувати математичний апарат для опису й дослідження реальних процесів і явищ та вмінь демонструвати математичні поняття на прикладах із життя, побуту.

3. Під час викладання шкільного курсу алгебри вищевказані визначення слід тлумачити так: *«Прикладна спрямованість навчання шкільного курсу алгебри* – це цілеспрямована зорієнтованість змісту, цілей, методів, організаційних форм і засобів навчання математики на встановлення методологічних і змістових зв'язків курсу алгебри з практикою; формування в учнів, під час вивчення алгебри математичних умінь і навичок, потрібних у побуті, професійній і науковій діяльності». Відповідно до сформульованого визначення важливо дотримуватися *дидактичної моделі реалізації ПСНШКА,* у складі якої передбачено планування змісту; формулювання цілей; упровадження ефективних методів реалізації прикладної спрямованості навчання шкільного курсу алгебри (методу математичного моделювання, проєктного методу навчання, навчальної практики та практичних робіт); застосування засобів (системи прикладних задач) та

організаційних форм, тому що їх використання забезпечує умови для формування в учнів уміння математичного моделювання.

4. Метод математичного моделювання є одним з ефективних методів розв’язування прикладних задач з алгебри, оскільки математичні моделі дають змогу продемонструвати зв’язок алгебри з навколишнім світом. Розроблена в процесі дослідження методика дозволяє формувати в учнів уміння здійснювати математичне моделювання під час роботи над прикладною задачею, забезпечує розуміння учнями того, що під час розв’язання прикладної задачі можна використовувати різні види математичних моделей (моделі формулювання умови, розв’язання, допоміжні), кожна з яких має своє значення й виконує конкретні функції. Вільне оперування етапами математичного моделювання є важливою умовою формування в учнів уміння здійснювати математичне моделювання.

5. Створена система прикладних задач є ефективним засобом реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри, оскільки систему розроблено відповідно до вимог (структури, функціонування). Прикладні задачі системи потрібно формувати за такими вимогами: змістова валідність, диференційовна реалізованість, сюжетна валідність, відповідність дидактичним цілям, узгодженість з видом математичної моделі, повнота даних. Запропонована в дослідженні система задач сприяє розв’язанню низки завдань: формує загальнонаукові методи пізнання, обчислювальні навички та логічне мислення учнів; забезпечує міжпредметні зв’язки; узагальнює та систематизує матеріал; сприяє залученню учнів до дослідницької діяльності.

6. З огляду на те, що математичне моделювання є спеціальним умінням у його структурі передбачено математичні знання та відповідні розумові дії, що реалізуються на кожному з відповідних етапів математичного моделювання (формалізація й побудова математичної моделі, дослідження побудованої моделі, інтерпретація розв’язку). Для оволодіння методом математичного моделювання потрібно розвивати такі вміння: розв’язувати

прикладні задачі, здійснювати математизацію об’єктів і процесів, логічно мислити, застосовувати інформаційні технології.

7. Відповідно до структури формування вміння математичного моделювання можна здійснювати за розробленою моделлю, у якій передбачено цільовий (мета формування вміння, забезпечення мотивації); змістовий (наповненість навчального матеріалу та індивідуально значуща діяльність; зв’язок зі змістовими лініями шкільного курсу алгебри); діяльнісний (етапи організації діяльності учнів, рівні сформованості та відповідні сутності вміння, характерні для конкретного рівня); контролювальний (діагностика за критеріями сформованості вміння, визначення рівня сформованості вміння математичного моделювання) компоненти.

8. На формування в учнів уміння математичного моделювання позитивно впливає застосування інформаційно-комунікаційних технологій. Упровадження ІКТ для формування вмінь математичного моделювання дозволяє розширити арсенал навчальних умінь учнів; сприяє організації творчого середовища; дає змогу розширити й закріпити міжпредметні зв’язки математики з іншими дисциплінами; забезпечує розвиток творчої активності учнів; дозволяє закріпити вміння учнів працювати з програмними засобами. Зокрема ефективним є створення та використання динамічних моделей, перевірка отриманих результатів, графічна ілюстрація, створення в межах проєктної діяльності та навчальної практики інтерактивних плакатів, презентацій, блогів, відеороликів.

9. Результати експериментальної перевірки підтверджують ефективність розробленої методики формування вмінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання алгебри й доводять, що дотримання запропонованої методики сприяє:

– формуванню вміння розв’язувати прикладні задачі;

– оволодінню учнями математичним моделюванням як методом розв’язування прикладних задач;

– підвищенню рівня математичної підготовки учнів;

– формуванню наукового світогляду;

– активізації пізнавального інтересу, розвитку творчих здібностей учнів.

10. У подальшому дослідженні можна передбачити:

– створення нових систем прикладних задач за основними змістовими лініями;

– розроблення нових інформаційно-комунікаційних технологій навчання учнів математичного моделювання, зокрема упровадження в освітній процес програми імітаційного моделювання під час підготовки навчальних проєктів.

Матеріали дослідження можна використовувати вчителям математики; для створення підручників, дидактичних матеріалів, збірників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абельсон И. Б. Две прогрессии. Москва : издательство академии наук СССР, 1938. 165 с.

2. Алгебра 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. 2-е изд. / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. Москва. 2014. 287 с.

3. Алгебра 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. 3-е изд. / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. Москва. 2016. 320 с.

4. Алгебра 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. 5-е изд. / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. Москва. 2010. 304 с.

5. Амосов Н. М. Моделирование мышления и психики. Киев : Наукова думка, 1965. 223 с.

6. Антоненко В. А., Леонський В. Д. Інтерактивна дошка SMART та використання її в навчальному процесі. *Комп'ютер у школі та сім'ї.* 2004. № 8. С. 20–22.

7. Бевз Г. П. Методи навчання математики: метод. посібник Х.: Видавнича група «Основа», 2003. 96 с.

8. Бевз Г. П. , Бевз В. Г. Алгебра: Підручник для 7 кл. К.: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.

9. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Г. П. Бевз, В. Г.Бевз. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2016.

10. Бевз Г. П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

11. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. Посібник /Г.П. Бевз. К.: Вища школа, 1989. 367с.

12. Бевз Г.П. Методика розв'язування алгебраїчних задач / Г.П. Бевз. К.: Рад. шк., 1975. 240 с.

13. Бевз В. Г. Методичні основи побудови системи задач і вправ у сучасних підручниках математики. *Науковий вісник МНУ*

імені В. О. Сухомлинського. Педагогічні науки. № 2 (57), травень 2017. С. 43–49.

14. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Видавничий світ «Освіта», 2008. 256 с.

15. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Зодіак-Еко, 2017. 272 с.

16. Бедлінський О. І. Проблема вікової періодизації підліткового віку в сучасному суспільстві. *Практична психологія та соціальна робота*, 2011, № 2.

17. Беррондо М. Занимательные задачи / пер. с французского Сударева Ю. Н.; под редакцией И. М. Яглома. Москва, 1983. 230 с.

18. Бовтенко М. А. Компьютерная лингводидактика: [учеб. Пособ.] / Марина Анатольевна Бовтенко. М.: Наука, 2005. 216 с.

19. Бойко М. П., Венгер Є. Ф., Мельничук О. В. Фізика 8 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Наукова думка, 2016. 274 с.

20. Бонч-Бруєвич Г. Ф. Технічні засоби навчання з використанням інформаційних комп’ютерних технологій: [навч. посіб.] / Бонч-Бруєвич Г. Ф. К. : КМПУ імені Б. Д. Грінченка, 2007. 44 с.

21. Ботузова Ю. В., Новікова А. О. Використання інтерактивної дошки на уроках математики. *Наукові записки. Вип. 168. Серія: Педагогічні науки.* Кропивницький: РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 47−52.

22. Ботузова Ю., Новікова А. Інтерактивна дошка на уроках математики. *Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті:* збірник матеріалів VI-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет конференції, м. Кропивницький, 19-20 квітня 2018 р. / За відп. ред. М. І. Садового. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2018. С. 34−36.

23. Бугаева М. А. Система практических работ как средство усиления прикладной направленности курса математики 5–6 классов : автореф. дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02. Москва, 1992. 16 с.

24. Бугаева М. А. Система практических работ как средство усиления прикладной направленности курса математики 5-6 классов: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 : РАО, Институт общеобразовательной школы. Москва, 1992. 141 с.

25. Буреломова А. С. Социально-психологические особенности ценностей современных подростков : дисс. … канд. психол. наук : 19.00.05 / Институт Социологии Образования Российской академии образования. Москва, 2013. 195 с.

26. Бухаленкова Д. А. Представление об успехе в подростковом возрасте : дисс. канд. психолог. наук : 19.00.13 / Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. Москва, 2018. 153 с.

27. Былков В. С. Формирование понятий о математическом моделировании средствами курса алгебры и начал анализа 9 и 10 классов. дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02 /Былков Владимир Станиславович. М., 1986. 195 с.

28. Вагіна Н. С Навчальна практика як засіб реалізації прикладної спрямованості навчання математики в основній школі : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Бердянський державний педагогічний університет. Бердянськ, 2006. 252 с.

29. Вагіна Н. С. Навчальна практика як засіб реалізації прикладної спрямованості навчання. *Математика в школі*. 2003. № 4. С. 32 –40.

30. Величко Е. В. Реализация прикладной направленности курса алгебры неполной средней школы. дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Величко Евгений Владимирович. М., 1987. 228 с.

31. Виходець О. Комунікаційні засади поведінки редакторів видавництва та ЗМІ. *Вісник книжкової палати*. 2013. № 1. С. 8 –10.

32. Возняк Г. М., Гусев В. А. Прикладные задачи на экстремумы в курсе математики 4–8 классов: пособие для учителя. Москва : Просвещение, 1985. 144 с.

33. Возняк Г.М., Маланюк К.П. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики: Розв’язування екстремальних задач: Метод, посібник. К.: Рад. шк., 1984. 124 с.

34. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі вивчення математики: Посібник для вчителя. К.: Рад. шк., 1989, 128 с.

35. Возняк Г. М. Математика. Прикладні задачі: від теорії до практики /Г.М. Возняк. Тернопіль : Мандрівець, 2003. 136 с.

36. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С.Выготский. М.: Педагогика, 1991. 381 с.

37. Глазкова О. В. Формирование химических знаний в процессе проведения лабораторно-практических работ в курсе химии средней школы : дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 1999. 209 с.

38. Глобін О. І. Міжпредметні зв’язки в умовах профільного навчання математики: методичний посібник для вчителів/ Глобін. О. І. Київ: Педагогічна думка, 2012. 88 с.

39. Гнеденко Б.В. Прикладные аспекты преподавания математики в средней школе. *Математика в школе.* 1977. №2. С. 57 – 63.

40. Горбунова А. Н. Из опыта организации практических работ на уроках экономики. *Инновационное развитие профессионального образования*. 2017. С. 32 – 38.

41. Горошко Ю. В. Розв’язування задач з параметрами за допомогою програми «GRAN-1». / Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. *Математика в школі*. 2008. № 7–8(84).

42. Горчакова І. А. Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / І. А. Горчакова ; Донецький нац. ун-т. К., 2002. 232 с.

43. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.А. Краснянская. М.: Педагогика, 1977. 136 с.

44. Гриб'юк О. О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. 376 с.

45. Гриб'юк О. О. Реалізація міжпредметних зв'язків в процесі навчання математики з використанням GeoGebra / О.О.Гриб'юк, В.Л.Юнчик. *Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті* : Матеріали I-ї Міжнародної науково-практичної конференції, 19 – 20 листопада 2015 року) / [редактори-упорядники: І. Зимомря, В. Ільницький]. – Ченстохова – Ужгород – Дрогобич : Посвіт, 2015. С. 193–197.

46. Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л. Розв'язування евристичних задач в контексті STEM-Освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* // зб. наук. пр. Випуск 43. Редкол. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2015. С. 206–218.

47. Грук В. Ю. Формирование ключевых компетенций учащихся основной школы при организации исследовательских лабораторий на базе реального физического эксперимента : дисс. … канд. кед. наук :13.00.02. Москва, 2008. 178 с.

48. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. Москва : Педагогика, 1987. 240 с.

49. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения/ В.В. Давыдов. М.: ИНТОР, 1996. 544 с.

50. Дворяткина С. Н. Межпредметные связи и прикладная направленность школьного курса математики в классах биологического профиля : дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02. Москва, 1998. 192 с.

51. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text (дата звернення: 10.03.2021)

52. Дорофеев Г. В. О составлении циклов взаимосвязанных задач. *Математика в школе*. 1983. № 6. С. 34 – 39.

53. Дубинчук О. С. Математика в 4 і 5 класах: методичний посібник / О.С. Дубинчук. К.: Радянська школа, 1986. 168 с.

54. Дубинчук О. С. Методика викладання алгебри в 7 – 9 класах: посібник для вчителя / О.С. Дубинчук, Ю.І. Мальований, Н.П. Дичек. К.: Радянська школа, 1991. 254 с.

55. Дутка Г.Я. Формування вмінь студентів розв'язувати прикладні задачі при навчанні математики в коледжах економічного профілю: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. К., 1998. 233с.

56. Егупова М. В. Методика использования задач с экологическим содержанием при обучении геометрии в основной школе : дисс. … канд. пед. наук. : 13.00.02 / Московский государственный педагогический университет. Москва, 2001. 209 с.

57. Егупова М. В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математики в школе: дисс. … докт. пед. наук: 13.00.02 / Егупова Марина Викторовна. Москва, 2014. 452 с.

58. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. К., 2009. 280 с.

59. Зайкин М. И., Арюткина С. В. Хрестоматия по методике математики. Обучение через задачи: пособие для студ., асп. и преп. матем. спец. пед. вузов, учителей математики общеобразовательных шк. Арзамас: АГПИ, 2005. 320 с.

60. Закон України «Про освіту» № 2145–VIII від 5 вересня 2017 року. Відомості Верховної ради України. Київ: Парламентське видавництво, 2017. № 38-39, 29 вересня 2017 року. С. 5–118.

61. Зубова И. И. Прикладная направленность системы задач физического содержания при обучении математике в средней школе : дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Орловский государственный университет. Орел, 2000. 159 с.

62. Ігнатенко М. Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики. Київ: "Тираж", 1997. 300 с.

63. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8-го класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2016. 272 с.

64. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2017. 264 с.

65. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Освіта, 2007. 223 с.

66. Кабанова–Меллер Е .Н. Формирование приёмов умственной деятельности умственного развития учащихся. Москва : Просвещение, 1968. 288с.

67. Кадемія М. Ю. Інтерактивні засоби навчання : навчально-методичний посібник / М. Ю. Кадемія, О. А. Сисоєва. Вінниця: ТОВ «Планер», 2010. 217 с.

68. Карабанова О. А. Возрастная психология. Конспект лекций. Москва : Айрис-пресс, 2005. 240 с.

69. Карпухіна О. О., Божинова Ф. Я., Хардіков В. В. Фізика 10 клас. Академічний рівень: збірник задач. Видання 2-ге, переробл. і доп. Харків: Видавництво «Ранок» 2011. 288 с.

70. Кле М. Психология подростка: (психосексуальное развитие) / Мишель Кле; [пер. с фр.]. Москва : Педагогика, 1991. 298 с.

71. Колмогоров А.М. Геометрія. Навчальний посібник для 6–8 класів середньої школи / А.М. Колмогоров, О.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. К.: Радянська школа, 1981. 328 с.

72. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Москва, Просвещение, 1977. 113 с.

73. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть II. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Москва. 1977. 146 с.

74. Колягин Ю. М. О прикладной и практической направленности обучения математике/Ю.М. Колягин, В.В. Пикан. *Математика в школе*. 1985. № 6. С. 27–32.

75. Коньшина Т. М. Детско-родительские отношения как условие развития личной профессиональной перспективы в старшем подростковом возрасте : дисс. … канд. психол. наук : 19.00.13 / Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. Москва, 2018. 237 с.

76. Короткова Л. М. Математический практикум как средство усиления прикладной и практической направленности обучения алгебры : автореф. дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Институт общего образования Министерства образования Российской Федерации. Москва, 1992. 16 с.

77. Кравчук В. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. /В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. Тернопіль: Підручники і посібники, 2016. 256 с.

78. Кравчук В. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. /В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. Тернопіль: Підручники і посібники, 2017. 256 с.

79. Кравчук В. Р. Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвіт. навч закл. / В. Р. Кравчук, М. В. Підручна, Г. М. Янчеко. Тернопіль : Підручники і посібники, 2014. 224 с.

80. Крайг Г. Психология развития / Грэйс Крайг ; [пер. с англ. Н. Мальгиной и др.]. Санкт-Петербург : Питер, 2000. 992 с.

81. Крамаренко Т. Г. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / За ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг : Видавничий дім, 2008. 272 с.

82. Крамор В. С. Задачи на составление уравнений и методы их решения: монография. Москва : ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009. 256 с.

83. Краснов Ю. Э. Современные дискуссии по проблеме «Метод проектов» (реферативный обзор источников, включая рассмотрение концепции Дж. Равена о развитии компетентностей высшего уровня посредством проектного обучения). *Метод проекта : Научно-методический сборник. Серия «Современные технологии университетского образования»*. Мн. : РИВШ БГУ, 2003. № 2. С. 197–221.

84. Крутихина М. В. Обучение элементам моделирования при решении сюжетных задач в курсе алгебры 8-летней школы как путь реализации прикладной направленности школьного курса математики: дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ленинградский гос. пед. ин-т им. А.И. Герцена. Л., 1986. 191с.

85. Кузьмінський А. І., Омельяненко С. В. Технологія і техніка шкільного уроку: Навчальний посібник. Київ: Знання, 2010. 335 с.

86. Кыверялг А. А. Методы исследований в профессиональной педагогике. Таллин, 1980. 334 с.

87. Лабудько С. П. Теорія та методика застосування інтерактивних засобів навчання. Методичні вказівки. Суми : Редакційно-видавничий відділ СОІППО, 2014.. 48 с.

88. Лапінський В.В. Мультимедійна дошка. / В. В. Лапінський, Л.А. Карташова. К.: Шкільний світ, 2011. 128 с.

89. Левандович В. І. Використання інтерактивних технологій у процесі навчання інформатиці [Електронний ресурс]. Режим доступу : http://videouroki.net/filecom.php?fileid=98657780.

90. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность / А.Н.Леонтьев.

М.: Политиздат, 1975. 304 с.

91. Лернер, И.Я. Учебные умения и их функции в процессе обучения / И.Я. Лернер II Роль учебной литературы в формировании общих учебных умений и навыков школьников / Общ. ред. В.В. Горелова. М.: Педагогика, 1984. С. 19 – 33.

92. Ложкина Е. М. Обучение математическому моделированию в курсе алгебры основной школы как условие развития учебно-познавательной компетентности учащихся: дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена". Санкт-Петербург, 2008. 209 с.

93. Лук'янова С. М. Роль прикладної спрямованості в навчанні математики учнів 5-6 класів. *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт: Труди міжнародної науково-методичної конференції «Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє»*. Донецьк, 2007. Випуск 28. С. 222–227.

94. Лысенко А. В., Петров А. В. Ценностные ориентации подростков. *Таврический научный обозреватель*. № 12 (29). Декабрь, 2017, часть 2. С. 61–67.

95. Мальований Ю. І. Алгебра підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. /Ю. І. Мальований, Г. М. Литвиненко, Г.М. Бойко. Тернопіль: Навчальна книга. «Богдан», 2015. 256 с.,

96. Мандель Б. Р. Педагогическая психология: ответы на трудные вопросы. Ростов н/Д : Феникс, 2007. 384 с.

97. Математика : підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2013. 368 с.

98. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972, с.196.

99. Межейнікова Л. С., Швець В. О. Математичні задачі з фінансовим змістом в основній школі. Харків: Видавнича група «Основа», 2004. 96 с.

100. Мельник Ю. С. Задачі прикладного змісту з фізики у старшій школі. навчально-методичний посібник. Київ: Педагогічна думка, 2013. 120 с.

101. Мельников, Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей [Текст] : монография / Ю.Б. Мельников. Екатеринбург : Уральское издательство, 2004. 384 с.

102. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків: Гімназія, 2017. 272 с.

103. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2015. 256 с.,

104. Мерзляк А. Г. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2014. 400 с.

105. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. Для 8 кл. загальноосвіт. навч закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Харків : Гімназія, 2016. 240 с.

106. Методика застосування технології SMART Board у навчальному процесі: [навч. посіб.] / Г. Ф. Бонч-Бруєвич, В. О. Абрамов, Т. І. Носенко К. : КМПУ імені Б. Д. Грінченка, 2007. 102 с.

107. Методичні рекомендації щодо організації навчально-виховного процесу під час проведення навчальних екскурсій та навчальної практики учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Лист МОН № 1/9-61 від 06.02.08 року [Електронний ресурс] Режим доступу до ресурсу: http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/2617.

108. Мишкіс А. Д. Елементи теорії математичних моделей / А. Д. Мишкіс. 3-е изд., испр. М.: КомКніга, 2007. 192 с.

109. Моделювання і прогнозування стану довкілля/ В. І. Лаврик, В. М. Боголюбов, Л. М. Полєтаєва, С. М. Юрасов, В. Г. Ільїна. К.: ВЦ «Академія», 2010. 400 с.

110. Морозов Г.М. Проблема формирования умений, связанных с применением математики: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Научно-исследовательский ин-т содержания и методов обучения АПН СССР. М., 1978. 22 с.

111. Мышкис А. Д. О прикладной направленности преподавания математики в средних специальных учебных заведениях. *Методические рекомендации по математике.* М.: Высшая школа, 1989. Вып. 11. С. 5–11.

112. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5 – 9 класи. (Затверджено Міністерством освіти і науки України №804 від 07.06.2017). *Математика в рідній школі.* 2017. № 7–№ 8. С. 10–25.

113. Немов Р.С. Психология: Учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн. 4-е изд. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС. Кн. 3: Психодиагностика. Введение в научное психологическое исследование с элементами математической статистики. 2001. 640 с.

114. Нижник В.Г., Коршак Є.В., Сиротюк В.Д. Дидактичні матеріали з фізики для 7 класу: посіб. для вчителів. К.: Пед. преса, 1999.84 с.

115. Нічуговська Л.І. Елементи математичного моделювання в шкільному курсі алгебри. *ПостМетодика*, 2001. №4(36). С. 35–38.

116. Новикова А. Система задач как средство реализации прикладной направленности курса алгебры. *Univers Pedagogic*. Revistă de Pedagogie şi Psihologie a Institutului de Științe ale Educaţiei. 2017. Nr.4 (56). С. 48–52.

117. Новикова А. А., Швец В. А. Прикладная направленность курса алгебры основной школы. *Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы:* материалы Международной научно-практической конференции, Минск, 10 – 13 мая, 2017 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; редкол. С. И. Василец (отв. ред.) [и др.].: Минск: БГПУ, 2017. С. 122–124.

118. Новицька Л.І. Формування вмінь розв'язувати прикладні задачі в процесі вивчення математики студентами аграрного університету : автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. К., 2008. 20 с.

119. Новікова А. О. До питання про створення системи прикладних задач з курсу алгебри основної школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики:* зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.–практ. конф., 30 травня – 1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. С. 155 – 158.

120. Новікова А. О. Психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь і навичок математичного моделювання. *Засоби і технології сучасного навчального середовища:* Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, м. Кропивницький, 18-19 травня 2018 року /Відповідальний редактор С. П. Величко. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем». 2018. С. 18 – 19.

121. Новікова А. О. Використання програмного забезпечення GeoGebra під час розв'язування прикладних задач змістової лінії «Функції та їх графіки». *Наукові записки. Вип. 169. Серія: Педагогічні науки.* Кропивницький: РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 112−115.

122. Новікова А. О. Змістова лінія тотожні перетворення в контексті прикладної спрямованості курсу. *Наукові записки. Вип. 12. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3.* Кропивницький: РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2017. С. 37−41.

123. Новікова А. О. Педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання. *Сучасна освіта в контексті нової української школи: зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11–12 жовтня 2018 р.* М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти

Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 62–64.

124. Новікова А. О. Система задач як засіб реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри основної школи. Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції *«Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова»,* 11–13 травня 2017 р., м. Київ, Україна К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 28–29.

125. Новікова А. О., Чінчой О. О. Формування математичної компетентності учнів основної школи в позаурочній роботі. *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інноваційний потенціал сучасної освіти та науки», НПУ імені М. П. Драгоманова*, м. Київ, 2020. С. 183–186.

126. Новікова А. О., Швець В. О. Система задач з теми «Нерівності» як засіб реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 18* : збірник наукових праць. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 170 – 178.

127. Новікова А. О. Дидактичні вимоги до конструювання системи прикладних задач як засобу формування уміння математичного моделювання. *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи:* збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 20–21 вересня 2019 р. /Міністерство освіти і науки України, ДЗ «ПНУ імені К. Д. Ушинського» [та ін.]. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. С. 106–108.

128. Новікова А. О. Навчальний проект як засіб формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання. *Математика в рідній школі,* 2018. № 11. С. 44–47.

129. Новікова А. О., Чінчой О. О. Використання науково-технічного потенціалу агропромислових виставок для реалізації методів математичного моделювання в курсах алгебри і фізики загальноосвітньої школи. *Наукові записки:* [збірник наукових статей] / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. Київ: Вд-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Випуск CXXXXI(141). 280 с.

130. Оконь В. Основы проблемного обучения. Москва: Просвещение, 1968. 208 с.

131. Осадчий В. В. Використання мультимедійного проектора та електронної інтерактивної дошки в навчально-виховному процесі ВНЗ: [навч.-метод. посіб.] / Осадчий В. В., Осадча К. П., Сердюк І. М. Мелітополь : ТОВ "Видавничий будинок ММД", 2011. 132 с

132. Панченко Л. Л. Формування вмінь математичного моделювання в процесі навчання майбутніх учителів математики : дис. … канд. пед. наук : 13.00.02. К., 2006. 260 с.

133. Перельман Я. И. Занимательные задачи и опыты. Москва : Государственное издательство детской литературы Министерства просвещения РСФСР, 1959. 529 с.

134. Петерсон Л.Г. Моделирование как средство формирования представлений о понятии функции в 4–6 классах средней школы / Л.С Петерсон. дисс. … канд. пед. наук, М., 1984. 201 с.

135. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Москва: Наука, 1975. 463 с.

136. Поливанова К. М. Психология возрастных кризисов: учеб. пособие. для студ. высш. пед. учеб. заведений. Москва: Академия, 2000. 184 с.

137. Полякова Т. А. Прикладная направленность обучения стохастике как средство развития вероятностного мышления учащихся на старшей ступени школы в условиях профильной дифференциации: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02/ Полякова Татьяна Анатолиевна. Омск, 2009. 22 с.

138. Прокопенко Н. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвітніх навч. закл. / Н. С. Прокопенко, Ю. О. Захарійченко, Н. Л. Кінащук. Харків: Видавництво «Ранок», 2016. 288 с.

139. Прокопенко Н. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвітніх навч. закл. / Н. С. Прокопенко, Ю. О. Захарійченко, Н. Л. Кінащук. Харків: Видавництво «Ранок», 2017. 288 с.

140. Просвирова И. Г. Особенности мотивации учебной деятельности у учащихся младшего подросткового возраста. *Вестник ТГПУ. Выпуск 10 (61). Серия: Педагогика*. 2006. С. 61 – 64.

141. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Прус Алла Володимирівна. К., 1997. 245 с.

142. Психология человека от рождения до смерти / под. ред.. А. А. Реана. Спб.: Прайм-Еврознак, 2006. 651 с.

143. Райс Ф. Психология подросткового и юношеского возраста / Ф. Райс, К. Долджин. Санкт-Петербург : Питер, 2010. 816 с.

144. Ракута В. М. Система динамічної математики GeoGebra як інноваційний засіб для вивчення математики [Електронний ресурс] *Інформаційні технології і засоби навчання.* 2012. № 4 (30). Режим доступу до журналу: http://journal.iitta.gov.ua.

145. Робота з мультимедійною дошкою : [навч. посіб.] / упоряд. В. Лапінський. К. : Шк. світ, 2008. 112 с

146. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования / С.Л.Рубинштейн. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1958. 147 с.

147. Рукшин С. Е. Задачи-серии во внеклассной работе. *Математика в школе.* 1981. № 6. С. 62 – 63.

148. Рум’янцева К. Є., Вільчинська О. М. Використання економіко-математичних моделей під час вивчення дисциплін математичного циклу «Математика для економістів». *Наукові записки. Вип.5. Серія: Проблеми*

методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2. Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. С. 49–53.

149. Салихова И. К., Хизбуллина Р. З., Сайфуллин И. Ю. Обучение приёмам определения азимута с помощью компаса на практических работах по географии. *Международный научный журнал «Инновационная наука»*. 2016. № 11-2. С. 204 – 205.

150. Салмина Н. Г. Структура, функционирование и формирование знаково-символической деятельности. дисс. … докт. психол. наук : 19.00.07. Москва, 1987. 433 с.

151. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

152. Сергєєнкова О. П., Столярчук О. А., Коханова О. П., Пасєка О. В. Вікова психологія. Навч. посіб. К.: Центр учбової літератури, 2012. 384 с.

153. Сиденко Е. А. К вопросу адаптации младшего подростка в социуме. *Инновационные проекты и программы в образовании*. 2011. № 1. С. 73–76.

154. Сиденко Е. А. Особенности старшего подросткового возраста. *Муниципальное образование: инновации и эксперимент*. 2011. № 2. С. 30–31.

155. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. СПб.: ООО «Речь», 2000. 350 с.

156. Сисоєнко Н. Використання інтерактивної дошки SMART board на уроках географії [Текст] / Н. Сисоєнко, З. Філончук. *Географія та основи економіки в школі :* Науково-методичний журнал. 2010. № 10. С. 17–20.

157. Скурихин В. И. Математическое моделирование / В. И. Скурихин, В. Б. Ширин, В. В. Дубровский. К.: Техника, 1983. 270 с.

158. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике. Метод. Пособие. Киев: «Радянська школа», 1983. 193 с.

159. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

160. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.

161. Соколенко Л.О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. К., 1998. 245 с.

162. Сторожева Н. В. Возможности использования исследовательского подхода на уроках биологии при проведении практических работ. *Эксперимент в школе*. 2009. № 5. С. 55–57.

163. Стукалов В. А. Использование представлений о математическом моделировании в обучении математике. дисс. … канд. пед. наук. М., 1976. 156 с.

164. Сухорукова Е. В. Прикладные задачи как средство формирования математического мышления учащихся: дисс. … канд. пед. наук :13.00.02 / Московский педагогический государственный университет. Москва, 1997. 204 с.

165. Тараник В. И. Практические работы по геометрии как средство развития самостоятельной познавательной деятельности учащихся основной школы : дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02. Волгоград, 2010. 275 с.

166. Тараник В. И. Практические работы по геометрии как средство развития самостоятельной познавательной деятельности учащихся основной школы : автореф. дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02. Волгоград, 2010. 29 с.

167. Тарасенкова Н. А. Алгебра : підруч. для 8 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К. : УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.

168. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К. : Видавничий дім «Освіта», 2015. 288 с.

169. Тарасенкова Н. А. Математика : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 288 с.

170. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики. М.: Просвещение, 1990. 96 с.

171. Тихонов Н. А., Токмачев М. Г. Основы математического моделирования. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2013. 84 с.

172. Ткаченко В. П., Чеботарьова І. Б., Киричок П. О., Григорова З. В. Енциклопедія видавничої справи: Навч. посібник. Х.: ХНУРЕ, 2008. 320 с.

173. Тонких А. П. Метод моделирования в курсе математики факультетов подготовки учителей младших клас сов. *Начальная школа*. 2002. № 1. С. 54–63.

174. Улухходжаев А. Усиление прикладной направленности преподавания курса математического анализа в педагогическом институте: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Московский гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. Москва, 1988. 16 с.

175. Федоров В. Д., Гильманов Т. Г. Экология. Изд-во МГУ, 1980. 464 с.

176. Фельдштейн Д. И. Проблемы возрастной педагогической психологии, М.,1995. 366 с.

177. Фирсов В. В. О прикладной ориентации курса математики. *Математика в школе.* 2006. №7. С.2–13.

178. Фирсов В.В. О прикладной ориентации курса математики. *Углубленное изучение алгебры и начал анализа* / Сост. С. И. Щварцбурд, О. А. Боковнев. М.: Просвещение, 1972. С.215–239

179. Фізика: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Г. Бар'яхтар, С. О. Довгий, Ф. Я. Божинова та ін. Харків: Видавництво «Ранок», 2015. 256 с.

180. Філімонова М. О. Формування умінь математичного моделювання в учнів основної школи в процесі навчання геометрії: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Філімонова Марія Олександрівна. Київ, 2015. 256 с.

181. Фоминых Ю. Ф. Прикладные задачи по алгебре для 7–9 классов: книга для учителя. Москва: Просвещение, 1999. 112 с.

182. Фридман Л. М. Наглядность и моделирование в обучении. М.: Знание, 1984. 80 с.

183. Хаймина Л. Э. Методика реализации прикладной направленности курса алгебры основной школы : дисс. … канд. пед. наук : 13.00.02. Архангельск, 1998. 160 с.

184. Хаметова З. Я. Об одном способе усиления прикладной направленности обучения. *Эвристика и дидактика точных наук*. Сборник науч. работ. Донецк: ТЕАН, 1993 . Вып. 1. С.34–43.

185. Хміль Н., Кисельова О. Формування у майбутніх учителів навичок використання інтерактивних дошок в освітньому процесі. *Наукові записки. Випуск 7. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2.* Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2015. 300 с.

186. Чінчой А. О. Використання археологічного матеріалу на уроках математики. *Наукові записки. Випуск 6. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина ІІ.* Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. С. 34-39.

187. Чінчой А. О. Математичне моделювання як засіб здійснення міжпредметних зв’язків курсу алгебри. *Наукові записки. Вип. 9. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Ч.1.* Кіровоград: РВВ КДПУ імені Володимира Винниченка, 2016. С. 54-61.

188. Чінчой А. О. Організація і проведення навчальної практики старшокласників у редакційно-видавничому центрі. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. Серія*

№5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Випуск 40: збірник наукових праць. Київ, 2013. С. 269-273.

189. Чінчой А. О. Прикладна спрямованість курсу алгебри основної школи. *Реалізація наступності в математичній освіті: Реалії та перспективи:* збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Одеса, 15-16 вересня 2016 року. Х.: Вид-во «Ранок», 2016. С. 129−131.

190. Чінчой А. О. Розв’язування задач міжпредметного змісту методом математичного моделювання. *Засоби і технології сучасного навчального середовища:* Матеріали конференції, м. Кіровоград, 27-28 травня 2016 року./ Відповідальний редактор: С.П.Величко. Кіровоград: ПП «Ексклюзив Систем», 2016. С. 64−66.

191. Чінчой А. О. Створення математичних задач з елементами історизму як засіб формування пізнавального інтересу учнів гуманітарних класів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Випуск 47*: збірник наукових праць. Київ, 2014. С. 295–300.

192. Чінчой А., Швець В. Математичне моделювання як один із методів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. *Математика в рідній школі.* 2016. № 9. С. 27–30.

193. Шапиро И. М.. Мотивационная функция задач в обучении математике. *Педагог: наука, технология, практика.* Барнаул. 1998. № 1 (4).

194. Шапиро, И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 96 с.

195. Шашкова Т. А. Методические особенности реализации прикладной направленности курса математики основной школы : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.02 /Московский государственный областной университет. Москва, 2005. 153 с.

196. Швец В. А., Новикова А. А. Прикладная направленность курса алгебры. *Годишник на ШУ „Епископ К. Преславски" Факултет по*

математика и информатика, том XVIII C, 2017. С. *105*–117.

197. Швець В. О., Новікова А. О. Математичне моделювання в курсі алгебри під час розв’язування задач на рух. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 20* : збірник наукових праць. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. С. 70 – 76.

198. Швець В. О. Математичне моделювання як змістова лінія шкільного курсу математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження* : міжнародний зб. наук. робіт. Донецьк : ТЕАН, 2009. Вип. 32. С. 16–23.

199. Штофф В. А. Моделирование и философия. Л.: Наука, Ленингр.отд-е, 1966. 301 с.

200. Щербакова Н. В., Казакова О. Б. Роль практических и лабораторных работ. Информатика как основа современного общества. 2011. С.16 – 17.

201. Эльконин Д.Б. Возрастные и индивидуальные особенности младших подростков / Под ред. Д. Б. Эльконина, Т. В. Драгуновой. М.: Педагогика, 1967. 234 с.

202. Эльконин Д. Б. Избранные психологические труды. Москва: Педагогика, 1989. 560 с.

203. Эриксон Э. Детство и общество / Эрик Хомбергер Эриксон / 2-е изд. Санкт-Петербург: Речь, 2000. 416 с.

204. Якиманская И. С. Знания и мышление школьника. М.: Знание, 1985. 80 с.

205. Якиманская И. С. Как развивать учащихся на уроках математики (учебно-методическое пособие). М.: МЭИ, 1996. 107 с.

206. Якиманская И. С. Технология личностно ориентированного образования. М.: Сентябрь, 2000. 175 с.

207. Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modeling: Can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and

Application. Vol. 1, No. 1. C. 45-48. Retrieved from: https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620/1087.

208. GeoGebra – провідна у світі програма динамічної математики та матеріали в руках учнів та вчителів, студентів та викладачів у всьому світі. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.geogebra.org/about

209. Joanna (Asia) Zolnierczyk. (2016). Perspectives of teachers regarding the integration of mathematics and science at the secondary school level. Queen's University Kingston, Ontario, Canada. URL: https://qspace.library.queensu.ca/bitstream/handle/1974/14449/Zolnierczyk_Joanna%28Asia%29_M_201605_MED.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

210. Simzar, R. M. (2015). Understanding Student Motivation and Affect in Middle School Mathematics Classrooms: Links with Algebra Course Placement and Achievement. UC Irvine. ProQuest ID: Simzar_uci_0030D_13868. Merritt ID: ark:/13030/m59h08d1. URL: https://escholarship.org/uc/item/1jb799bd.

ДОДАТКИ

Додаток А

Зміст основних тем курсу алгебри 7-9 класів

Клас	Тема	Зміст
7-й клас	**ЦІЛІ ВИРАЗИ**	Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Тотожність. Тотожні перетворення виразу Степінь з натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником Одночлен. Стандартний вигляд одночлена. Піднесення одночленів до степеня. Множення одночленів Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена Додавання, віднімання і множення многочленів Формули квадрата двочлена, різниці квадратів, суми і різниці кубів Розкладання многочленів на множники
	ФУНКЦІЇ	Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функції. Графік функції Лінійна функція її графік та властивості
	ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ	Лінійне рівняння з однією змінною. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік Система двох лінійних рівнянь з двома змінними Розв’язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними: графічним способом; способом підстановки; способом додавання Лінійні рівняння та їх системи як математичні моделі текстових задач

Клас	Тема	Зміст
8-й клас	**РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ**	Раціональні вирази. Раціональні дроби. Основна властивість раціонального дробу Арифметичні дії з раціональними дробами Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння Степінь із цілим показником та його властивості. Стандартний вигляд числа Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості
	КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА	Функція $y = x^2$, її графік і властивості Арифметичний квадратний корінь. Властивості арифметичного квадратного кореня Множина. Підмножина. Числові множини. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа. Функція $y=\sqrt{x}$, її графік і властивості
	КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ	Квадратний тричлен Квадратні рівняння Формула коренів квадратного рівняння Теорема Вієта Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники Розв’язування рівнянь, які зводяться до квадратних Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі

<table>
<tr><th>Клас</th><th>Тема</th><th>Зміст</th></tr>
<tr><td rowspan="4">9-й клас</td><td>НЕРІВНОСТІ</td><td>Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей
Нерівності зі змінними. Лінійні нерівності з однією змінною
Об’єднання та переріз множин. Числові проміжки
Рівносильні нерівності
Системи лінійних нерівностей з однією змінною
Квадратна нерівність</td></tr>
<tr><td>КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ</td><td>Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції
Перетворення графіків функцій
Квадратична функція, її графік і властивості
Система двох рівнянь з двома змінними
Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі</td></tr>
<tr><td>ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ</td><td>Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків.
Випадкова подія. Ймовірність випадкової події.
Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Середнє значення</td></tr>
<tr><td>ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ</td><td>Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії, їх властивості. Формули n-го члена арифметичної та геометричної прогресій. Формули суми перших n-членів арифметичної та геометричної прогресій</td></tr>
</table>

Додаток Б

Змістові лінії у курсі алгебри основної школи

Змістова лінія	***7 клас***	***8 клас***	***9 клас***
Лінія вирази і тотожні перетворення над ними	Цілі вирази	Раціональні вирази, квадратні корені, дійсні числа	Елементи прикладної математики
Лінія рівнянь та нерівностей	Лінійні рівняння та їх системи	Квадратні рівняння	Нерівності, лінійні, квадратні та їх системи Система двох рівнянь з двома змінними
Лінія функції та їх графіки	Лінійна функція її графік та властивості	Функція $y = x^2$, її графік і властивості Функція $y=\sqrt{x}$, її графік і властивості Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості	Квадратична функція, числові послідовності

Додаток В

Особливості вікової періодизації учнів основної та старшої школи

Клас	Вік	Назва
5	9 – 10	Молодший шкільний вік
6	10 – 11	
7	12 – 13	Молодший підлітковий вік
8	13 –14	
9	14 –15	Старший підлітковий вік
10	15 – 17	
11		

Додаток Г

Прикладні задач до теми «Прогресія»

Тему *«Прогресії»* відмітимо, що нашій роботі послідовність розглядаємо як функцію натурального аргументу.

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$ – арифметична прогресія, де a_1 перший елемент, d різниця.

x	1	2	…	n
$f(x)$	a_1	a_2	…	a_n

Окремо слід нагадати, що залежно від того, яке значення у різниці арифметичної прогресії, ми говоримо про її зростання або спадання.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ – геометрична прогресія, де b_1 перший елемент, q знаменник.

x	1	2	…	n
$f(x)$	b_1	b_2	…	b_n

Геометрична прогресія у суміжних дисциплінах і побуті

Біологія і алгебра. У біології математичні моделі використовуються в абстрактній формі і представляють систему або явище з використанням формальних засобів математики. Модель клітини, екосистеми та їх взаємодія представлені у вигляді математичних виразів. Досліджуючи відповідну модель біологічної системи можна виявити вплив на неї різноманітних факторів та визначити її майбутній стан.

Застосування алгебраїчних методів моделювання у біології здійснюється при вивченні популяцій організмів, встановленні еволюційних зв'язків в епідеміології.

Алгебраїчні методи дають можливість створювати математичні моделі біологічних систем і аналізувати процеси, що протікають на різних рівнях розвитку живого, і є основним засобом теоретичного дослідження біології.

Задача №1. Зростання чисельності населення міста впродовж часових періодів 1, 2, 3,.. і т. д. описується прогресією, частина якої зображена на рисунку 3. Визначити тип прогресії, знайти її основні компоненти. Встановити чисельність населення через 7 часових періодів.

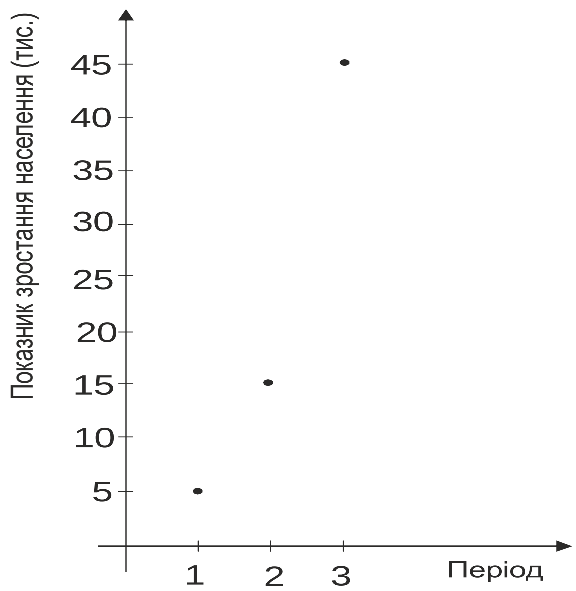


Рис.15. Графік зростання показника населення

Розв'язання. Проаналізувавши графік, встановили, що це зростаюча геометрична прогресія з першим елементом 5 і знаменником 3. Щоб знайти показник чисельності населення через 7 часових періодів необхідно записати формулу для суми семи перших членів геометричної прогресії.

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1};\ b_n = b_1 \cdot q^n;\ b_7 = b_1 \cdot q^7 = 5 \cdot 3^6;\ S_7 = \frac{b_7 \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{5 \cdot 3^6 - 5}{3-1} = \frac{728}{2} = 364.$$

Відповідь: Через 7 часових періодів показник росту населення складатиме 364 тисячі осіб.

Інформатика і алгебра. Однією із проблем, яка вирішується застосуванням міжпредметних зв'язків математики й інформатики, є пошук найбільш оптимальних і менш затратних за часом та кількістю дій засобів автоматизації обчислювальних операцій.

Задача №2. Користувач під час роботи за комп'ютером завантажив програму, яка містила файловий вірус, що активувався після запуску програми. Встановити скільки своїх копій здійснить вірус за 10 секунд, якщо відомо, що вірус розмножується щосекунди за геометричною прогресією зі знаменником 3.

Розв'язання. $b_n = b_1 \cdot q^n$ – відшукання n–го елемента прогресії;

$S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ – сума n перших членів геометричної прогресії.

$S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \dfrac{1-3^{10}}{1-3} = \dfrac{1-59049}{-2} = 29524$ копій. *Відповідь:* вірус утворить 29524 своїх копій за 10 секунд.

Побут і алгебра. *Задача №3.* Продавець з метою швидкого збуту товару продає каву за акцією «півпачки в подарунок». Першому покупцю він продав половину від загальної кількості пачок кави і півпачки в подарунок. Другому покупцю він продав половину з того, що лишилась і півпачки в подарунок, і т.д. Кава у продавця закінчилась при п'ятому продажі. Встановити скільки пачок кави було у продавця.

Розв'язання. Припустимо, що на початку у продавця було x – пачок кави, тоді при першому продажі куплено $\left(x-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\right)=\dfrac{x+1}{2}$ пачок, при другому продажу $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{4}$, при п'ятому продажі $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x+1}{8}-\dfrac{x+1}{16}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x+1}{32}$.

Складемо рівняння: $\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{4}+\frac{x+1}{8}+\frac{x+1}{16}+\frac{x+1}{32}=x$,

$(x+1)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)=x$ (1), у другій дужці суму геометричної прогресії зі знаменником $q=\frac{1}{2}$ шукаємо за формулою $S_n=\frac{b_1-b_n\cdot q}{1-q}$.

$S_5=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{32}$, повертаємось до рівняння (1): $(x+1)\cdot\left(1-\frac{1}{32}\right)=x$,

$\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{32}$, $\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{32}$, $1-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{32}$, $x=31$. *Відповідь:* всього було продано 31 пачку кави.

Задача № 4. Дріжджі у цукровому сиропі ростуть зі швидкістю, яка визначається збільшенням їх маси на 10% за годину. Початкова маса дріжджів складає 1 г. Встановити скільки дріжджів утвориться у сиропі через 12 годин.

Розв'язання. I. Формалізація. Вивчимо процес зміни маси дріжджів. Запишемо: початкова маса – 1 г; маса дріжджів після першої години збільшилась на 10% – $1+1\cdot 0{,}1=1{,}1\,г$, маса дріжджів після другої години збільшилась ще на 10% – $1{,}1+1{,}1\cdot 0{,}1=1{,}21\,г$, після третьої години – $1{,}21+1{,}21\cdot 0{,}1=1{,}331\,г$. Тобто, отримали наступну послідовність: $1;\,1{,}1;\,1{,}21;\,1{,}331;\,\ldots(1)$

Проаналізувавши швидкість зміни маси дріжджів у сиропі, встановили, що їх маса зростає за правилом геометричної прогресії, де $b_1=1,\,q=1{,}1$. Математичною моделлю до задачі є геометрична прогресія (1). Щоб з'ясувати масу після 12 годин, необхідно знайти суму перших 12 членів геометричної прогресії.

II. Дослідження математичної моделі. Пригадаємо формулу для відшукання суми n перших членів геометричної прогресії.

$$S_n=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1},\quad S_{12}=\frac{b_1\cdot(q^{12}-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(1{,}1^{12}-1)}{1{,}1-1}$$

$S_{12} = \frac{b_1 \cdot (q^{12} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (1{,}1^{12} - 1)}{1{,}1 - 1} = 21{,}38$. III. Інтерпретація. Через 12 годин у сиропі утвориться 21,38 г дріжджів. *Відповідь.* $m = 21{,}38$ *г*.

Арифметична прогресія в прикладних задачах ЗНО

ЗНО 2015 року: «*Плавець під час першого тренування подолав дистанцію в 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець пропливав за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?*» *Розв'язання*. Процес, описаний у задачі відбувається у повсякденному житті спортсмена. Часто потрібно зробити аналіз або розробити програму тренувань, яка буде забезпечувати нарощування складності.

Після першого тренування плавець подолав дистанцію 450 м, другого – 500 м, третього – 550 м, тобто маємо справу з арифметичною прогресією з різницею $d = 50\,м$ і першим членом $a_1 = 450\,м$. Після того, як плавець проплив 1000 м (a_n), він не збільшував дистанцію, а стабільно пропливав по 1000 м. Математична модель ситуації: $a_n = a_1 + d(n-1)$. Розв'язуємо математичну модель $1000 = 450 + 50(n-1)$, $n = 12$. З'ясували, що було 12 тренувань до досягнення дистанції 1000 м. За умовою задачі плавець тренувався тричі на тиждень, тоді протягом 10 тижнів у нього було 30 занять. 12 занять (до досягнення відстані 1000 м) + 18 занять (з дистанцією 1000 м). Допоміжна математична модель: $S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot n$, $S_{12} = \frac{450 + 1000}{2} \cdot 12 = 8700\,м$. Тоді всього за 10 тижнів $8700\,м + 18000\,м = 26700\,м$.

ЗНО 2016 року: *«Під час підготовки до екзамену студент розв'язав за 9 днів 315 задач. У перший день він розв'язав 11 задач, а кожного наступного дня розв'язував на одну й ту ж саму кількість задач більше, ніж попереднього дня. Скільки задач розв'язав студент дев'ятого дня?»*

Розв'язання. $a_1 = 11,\ S_9 = 315$, $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $315 = \frac{11 + a_9}{2} \cdot 9,\ a_9 = 59$.

ЗНО 2010 року: *«Мобільним оператором було запроваджено акцію з такими умовами: плата за з'єднання відсутня; за першу хвилину розмови абонент сплачує 30 коп, а за кожну наступну хвилину розмови — на 3 коп менше, ніж за попередню; плата за одинадцяту та всі наступні хвилини розмови не нараховується; умови дійсні для дзвінків абонентам усіх мобільних операторів країни. Скільки за умовами акції коштуватиме абоненту цього мобільного оператора розмова тривалістю 8 хвилин (у грн)?»* *Розв'язання.* $a_1 = 30,\ d = -3,\ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (математична модель), $S_8 = \frac{2 \cdot 30 - 3(8-1)}{2} \cdot 8 = \frac{60 - 21}{2} \cdot 8 = 39 \cdot 4 = 156$ *коп*

Додаток Д

Планування змісту навчального матеріалу з алгебри

Кольором ми виділили зміст навчального матеріалу теми, який пропонуємо додати до програми з математики. У кінці кожної теми наведено вимоги до вмінь учнів.

7 клас

(*70 год, 2 год на тиждень, резерв — 12 год*)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	**Зміст навчального матеріалу**
Тема 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ (*30 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** числових виразів; виразів зі змінними; одночленів; многочленів **пояснює:** як знайти числове значення виразу зі змінними при заданих значеннях змінних; що таке: тотожні вирази, тотожне перетворення виразу, одночлен стандартного вигляду, коефіцієнт; **формулює:** означення: одночлена, степеня з натуральним показником; многочлена, подібних членів многочлена, степеня многочлена; властивості степеня з натуральним показником; правила: множення одночлена і многочлена, множення двох многочленів; **розв'язує вправи, що передбачають:** обчислення значень виразів зі змінними; зведення одночлена до стандартного вигляду; перетворення добутку одночлена і многочлена, суми, різниці, добутку	Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Цілий вираз як математична модель, що описує міжпредметні зв'язки, реальні ситуації, результат чи процес професійної діяльності Тотожність. Тотожні перетворення виразу. Степінь з натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником. Одночлен. Піднесення одночленів до степеня. Множення одночленів. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена. Додавання, віднімання і множення многочленів. Формули квадрата двочлена, різниці квадратів, суми і різниці кубів. Розкладання многочленів на

двох многочленів у многочлен; розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки, способом групування, за формулами скороченого множення та із застосуванням декількох способів; використання зазначених перетворень у процесі розв'язування рівнянь, доведення тверджень	множники Застосування тотожних перетворень цілих виразів під час розв'язування прикладних задач
Учень здійснює перетворення цілих виразів при розв'язуванні прикладних задач, демонструє використання цілих виразів на прикладі міжпредметних зв'язків.	
Тема 2. ФУНКЦІЇ (*10 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** функціональних залежностей; лінійних функцій; **пояснює**, що таке: аргумент; функція; область визначення функції; область значень функції; графік функції; **формулює** означення понять: функція; графік функції; лінійна функція; пряма пропорційність; **називає та ілюструє на прикладах** способи задання функції; **описує** побудову графіка функції, зокрема лінійної та її окремого виду – прямої пропорційності; **розв'язує вправи, що передбачають:** знаходження області визначення функції; знаходження значення функції за даним значенням аргументу; побудову графіка лінійної функції; знаходження за графіком функції значення функції за даним значенням аргументу і навпаки; визначення окремих характеристик функції за її графіком (додатні значення, від'ємні значення, нулі); **складає та розв'язує задачі на:** пряму пропорційність на основі життєвого досвіду; побудову графіків	Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функції. Графік функції Лінійна функція її графік та властивості Лінійна функція як математична модель прикладної задачі. Лінійні залежності у повсякденній реальності, професійній діяльності та в інших дисциплінах

при моделюванні реальних процесів з використанням лінійної функції тощо	
Розв'язує прикладні задачі, де математична модель – лінійна функція, яку необхідно дослідити.	
Тема 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ (*18 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** рівняння з однією та двома змінними; лінійних рівнянь з однією та двома змінними; системи двох лінійних рівнянь з двома змінними; **пояснює:** що таке система двох лінійних рівнянь з двома змінними; скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними; **формулює** означення: лінійних рівнянь з однією та двома змінними; розв'язку рівняння з двома змінними; розв'язку системи двох лінійних рівнянь з двома змінними; **будує** графіки лінійних рівнянь із двома змінними; **описує** способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними; **характеризує** випадки, коли система двох лінійних рівнянь з двома змінними має один розв'язок; має безліч розв'язків; не має розв'язків; **складає**: рівняння та системи рівнянь за умовою текстової задачі; **розв'язує:** лінійні рівняння з однією змінною і рівняння, що зводяться до них; текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною; системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, вказаними у змісті способами; текстові задачі за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними	Лінійне рівняння з однією змінною. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Лінійне рівняння як математична модель прикладної задачі Система двох лінійних рівнянь з двома змінними. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними: графічним способом; способом підстановки; способом додавання. Системи лінійних рівнянь як математичні моделі прикладних задач
Учень вміє розкривати зміст поняття у процесі створення математичних моделей до прикладних задач. Розпізнає прикладні задачі де рівняння може	

бути як математичною моделлю так і допоміжним кроком її реалізації.
Розв'язує сюжетні задачі: на рух з точки зору його безпеки; на розпорядження власними та родинними фінансами; фінансового змісту крізь призму історичних подій тощо

Змістові лінії: *тотожні перетворення виразів* (цілі вирази); *рівняння та нерівності* (лінійні рівняння та їх системи); *функції та їх графіки* (лінійна функція $y = \sqrt{x}$).

8-й клас

(*70 год, 2 год на тиждень, резерв — 20 годин*)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ (*24 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** раціонального виразу; раціонального дробу; степеня із цілим показником; **розпізнає:** цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази; **пояснює**: як виконати скорочення дробу; як звести дріб до нового знаменника; як звести дроби до спільного знаменника; що таке стандартний вигляд числа; **формулює:** основну властивість дробу; властивості степеня з цілим показником; правила: додавання, віднімання, множення, ділення дробів, піднесення дробу до степеня; умову рівності дробу нулю; означення: степеня з нульовим показником; степеня з цілим від'ємним показником; **описує** властивості функції $y = \frac{k}{x}$ за її графіком; **розв'язує вправи, що**	Степінь із цілим показником та його властивості. Стандартний вигляд числа. Застосування стандартного вигляду числа при розв'язуванні прикладних задач Раціональні вирази. Раціональний вираз як математична модель, що описує міжпредметні зв'язки, реальні ситуації, результат чи процес професійної діяльності Раціональні дроби. Основна властивість раціонального дробу. Арифметичні дії з раціональними дробами. Раціональні рівняння. Раціональне рівняння як

передбачають: скорочення дробів; зведення дробів до спільного знаменника; знаходження суми, різниці, добутку, частки дробів; тотожні перетворення раціональних виразів; розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику дробу; перетворення степенів з цілим показником; запис числа в стандартному вигляді; побудову графіка функції $y = \frac{k}{x}$	математична модель прикладної задачі Рівносильні рівняння. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості Обернена пропорційність як математична модель, що відображає міжпредметні зв'язки, реальні процеси побуту, професійну діяльність, її процес або результат
Учень здійснює перетворення цілих і дробових раціональних та ірраціональних виразів при розв'язуванні прикладних задач.	
Тема 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА (*10 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** раціональних чисел; ірраціональних чисел; **пояснює,** що таке: раціональне число; ірраціональне число; дійсне число; **формулює:** означення арифметичного квадратного кореня з числа; властивості арифметичного квадратного кореня; **характеризує:** властивості функцій $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, за їх графіками; **розв'язує вправи, що передбачають:** застосування поняття арифметичного квадратного кореня для обчислення значень виразів, спрощення виразів, розв'язування рівнянь, порівняння значень виразів; перетворення виразів із застосуванням винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня, звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу; побудову графіків функцій $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;	Функція $y = x^2$, її графік і властивості. Квадратична функція як математична модель, що відображає міжпредметні зв'язки, реальні процеси побуту, професійну діяльність, її процес або результат Арифметичний квадратний корінь. Властивості арифметичного квадратного кореня. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості Функція $y = \sqrt{x}$ як математична модель, що відображає міжпредметні зв'язки, реальні

	процеси побуту, професійну діяльність, її процес або результат
Учень використовує квадратичну функцію як засіб математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв’язування на цій основі прикладних задач.	
Тема 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ (*16 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** квадратних рівнянь; квадратних тричленів; **формулює:** означення квадратного рівняння та квадратного тричлена; кореня квадратного рівняння; теорему Вієта; **записує:** формулу коренів квадратного рівняння; формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники; **складає** квадратне рівняння за умовою текстової задачі; **розв’язує вправи, що передбачають:** знаходження коренів квадратних рівнянь; розкладання квадратного тричлена на множники; знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання і розв’язування квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до них, як математичних моделей прикладних задач	Квадратні рівняння. Формула коренів квадратного рівняння. Теорема Вієта. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники. Розв’язування рівнянь, які зводяться до квадратних. Квадратне рівняння та рівняння які зводяться до квадратних, як математичні моделі прикладних задач
Учень використовує квадратні рівняння як засоби математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв’язування на цій основі прикладних задач.	
Розв’язує сюжетні задачі на: використання взаємозв'язків економічних явищ; види та розрахунки податків, платежів; рух; продуктивність праці; вартість товару; сумісну роботу; суміші та сплави тощо	

Змістові лінії: *тотожні перетворення виразів* (дійсні, раціональні, ірраціональні вирази); *рівняння та нерівності* (квадратні рівняння); *функції та їх графіки* (квадратична функція, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}y = \sqrt{x}$).

9 клас
(*70 год, 2 год на тиждень, резерв — 18 год*)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 1. НЕРІВНОСТІ (*14 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** числових нерівностей; нерівностей зі змінними; лінійних нерівностей з однією змінною; подвійних нерівностей; **пояснює** що таке об'єднання та перетин числових проміжків; **формулює:** властивості числових нерівностей, властивості нерівностей зі змінною; означення: розв'язку лінійної нерівності з однією змінною, рівносильних нерівностей; **обґрунтовує** властивості числових нерівностей; **зображує** на координатній прямій: об'єднання та перетин числових проміжків, задані нерівностями числові проміжки; виконує обернене завдання; **записує** розв'язки нерівностей та їх систем у вигляді об'єднання числових проміжків або у вигляді відповідних нерівностей; **розв'язує:** лінійні нерівності з однією змінною; системи лінійних нерівностей з однією змінною	Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей. Нерівності зі змінними. Лінійні нерівності з однією змінною. Числові проміжки. Рівносильні нерівності. Системи лінійних нерівностей з однією змінною Лінійні нерівності та їх системи, як математичні моделі, що відображають міжпредметні зв'язки, реальні процеси побуту, професійну діяльність, її процес або результат
Учень використовує лінійні і квадратні рівняння, нерівності у якості засобу математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язує на цій основі прикладні задачі.	
Тема 2. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ (*20 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади** квадратичної функції; **обчислює** значення функції в точці **пояснює** перетворення графіків функції: $f(x) \to f(x)+a$; $f(x) \to f(x+a)$; f	Властивості функції. Нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найбільше та найменше значення функції. Перетворення графіків функцій.

(x) → kf (x), f (x) → – f(x); алгоритм побудови графіка квадратичної функції; **характеризує** функцію за її графіком **розв'язує вправи, що передбачають:** побудову графіка квадратичної функції; розв'язування квадратних нерівностей; знаходження розв'язків систем двох рівнянь з двома змінними, з яких хоча б одне рівняння другого степеня; складання і розв'язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей прикладних задач	Квадратична функція, її графік і властивості. Квадратна нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними. Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі
Учні використовують квадратичну функцію як засіб математичного моделювання реальних процесів і явищ, розв'язує на цій основі прикладні задачі.	
Тема 3. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ (*10 год*)	
Учень/учениця: **наводить приклади:** числової послідовності; арифметичної та геометричної прогресій; **формулює** означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій; **записує і пояснює:** *формули*: n-го члена арифметичної та геометричної прогресій, суми перших n членів цих прогресій; *властивості* арифметичної та геометричної прогресій **розв'язує вправи, що передбачають:** обчислення членів прогресії; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших n членів арифметичної й геометричної прогресій; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресії	Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії, їх властивості. Формули n-го члена арифметичної та геометричної прогресій. Формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Тема 4. ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ (8 год)</td></tr>
<tr><td>Учень/учениця:
наводить приклади: випадкових подій, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, застосування правил комбінаторики
пояснює, що таке: частота випадкової події, ймовірність випадкової події
знаходить, відбирає і впорядковує інформацію з доступних джерел
розв'язує задачі, що передбачають: використання комбінаторних правил суми та добутку; знаходження ймовірності випадкової події; обчислення частоти випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків</td><td>Основні правила комбінаторики.

Частота та ймовірність випадкової події.

Початкові відомості про статистику.

Способи подання даних та їх обробки</td></tr>
<tr><td colspan="2">Учень удосконалює обчислювальні навички (виконання тотожних перетворень цілих і дробових виразів,), достатні для вільного їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також у процесі розгляду різноманітних практичних застосувань математичного знання.
Виконує задачі на відсоткові розрахунки.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розв'язує сюжетні задачі на: розрахунок та аналіз фінансової спроможності родини; розрахунок обсягу сплачених податків; прийняття рішень стосовно особистих та колективних фінансових питань тощо</td></tr>
</table>

Змістові лінії: *тотожні перетворення виразів* (цілі, раціональні, ірраціональні вирази); *рівняння та нерівності* (лінійні, квадратні нерівності та їх системи); *функції та їх графіки* (квадратична функція).

Додаток Е

Проєкт «Застосування методу математичного моделювання в агрономії»

Тип проєкту: індивідуальний, прикладний, дослідницько-пошуковий.

Мета: *навчити учнів складати, аналізувати, інтерпретувати математичні моделі у процесі розв'язування прикладних задач; ознайомити з поняттям відносна похибка моделі; посилити уявлення про математику як метод пізнання дійсності.*

Запланований результат: учні вміють найбільш точно підбирати математичні моделі до описаних процесів; використовують знання про числові функції, їх властивості та графіки на практиці.

І. Занурення в проєкт.

Математизація реального процесу дозволяє здійснити більш повне його дослідження. У межах проєкту учні з'ясовують як застосовувати знання пов'язані з поняттям функція на практиці. Наведено три завдання одне з яких демонстраційне (завдання-зразок), а два інші для самостійного виконання. Результати виконання завдання оформити у вигляді презентації.

ІІ. Організація діяльності.

Демонстраційне завдання. На графіку наведені відомості про відстані між рослинами і норм висівання у межах від 400 тисяч до 800 тисяч штук на га. З'ясувати чи залежить відстань між рослинами від норми висівання. Якщо так, то записати залежність функцією, яку ви знаєте (лінійна, квадратична, обернена пропорційність, $y=\sqrt{x}$). Визначити, яка з функцій краще відображає характер залежності (користуватись відносною похибкою $\frac{|n-n_0|}{n_0}\cdot 100\%$, n – значення, отримане в результаті підстановки у модель, n_0 – значення з графіку функції).

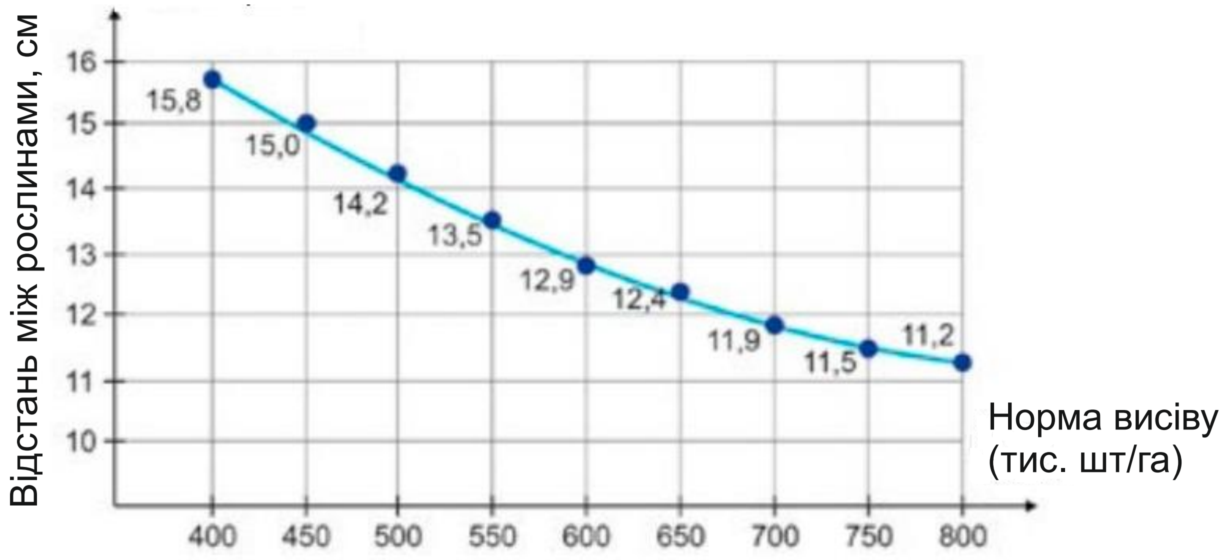


Рис. 1. Норма висівання рослини

Розв'язання. Проаналізуємо рис. 1. Кожному значенню норми посіву насінин відповідає єдина відстань між рослинами, тому описана на графіку залежність є функцією.

Створимо таблицю значень функцій.

x	400	450	500	550	600	650	700
$y(x)=n_0$	15,8	15,0	14,2	13,5	12,9	12,4	11,9

Для підбору оберемо три функції, які вивчаються у курсі алгебри основної школи. Порівняємо точки головного графіку з значеннями лінійної функції, оберненої пропорційності та функцією $y=\sqrt{x}$. Будемо використовувати формулу $\frac{|n-n_0|}{n_0}\cdot 100\%$.

Модель 1. Підберемо вигляд лінійної функції, яка приблизно співпадає із значеннями на графіку (рис. 1). Отримаємо, $y(x)=\frac{-8}{500}\cdot x+22$.

x	$y(x)$	$\frac{\lvert n-n_0\rvert}{n_0}$	%
400	14	0,11	11%
450	13	0,133333333	13%
500	12	0,154929577	15%
550	11	0,185185185	18%

600	10	0,224806202	22%
650	9	0,274193548	27%
700	8	0,327731092	32%

В середньому отримана модель дає похибку 19,7%, а максимальне значення похибки становить 32%.

Модель 2. Підберемо вигляд функції $y = \sqrt{x}$ у відповідності із точками на рис. 1, це буде функція $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

x	$y(x)$	$\frac{\lvert n - n_0 \rvert}{n_0}$	%
400	10	0,367089	36%
450	10,6066	0,292893	29%
500	11,18034	0,212652	21%
550	11,72604	0,131404	13%
600	12,24745	0,050585	5%
650	12,74755	0,028028	2%
700	13,22876	0,11166	11%

В середньому отримана модель дає похибку 17%, а максимальне значення похибки становить 36%.

Модель 3. Підберемо вигляд функції $y = \frac{k}{x}$ у відповідності з точками на рис. 1 це буде функція $y = \frac{6400}{x}$.

x	$y(x)$	$\frac{\lvert n - n_0 \rvert}{n_0}$	%
400	16	0,012658	1%
450	14,22222	0,051852	5%
500	12,8	0,098592	9%
550	11,63636	0,138047	13%
600	10,66667	0,173127	17%
650	9,846154	0,205955	20%
700	9,142857	0,231693	23%

В середньому отримана модель дає похибку 11%, а максимальне значення похибки становить 23%.

Отримали, що серед трьох моделей краще віддзеркалює дану залежність функція $y = \frac{6400}{x}$.

ІІІ. Діяльність по проєкту

Завдання 1. На графіку наведені відомості про дні після висадки часнику і його суху вагу у грамах. З'ясувати чи залежить суха вага від днів після посадки. Якщо так, то записати залежність функцією, яку ви знаєте (лінійна, квадратична, обернена пропорційність, $y=\sqrt{x}$). Визначити, яка з функцій краще відображає характер залежності (користуватись відносною похибкою $\frac{|n-n_0|}{n_0}\cdot 100\%$, n – значення, отримане в результаті підстановки у модель, n_0 – значення з графіку функції).

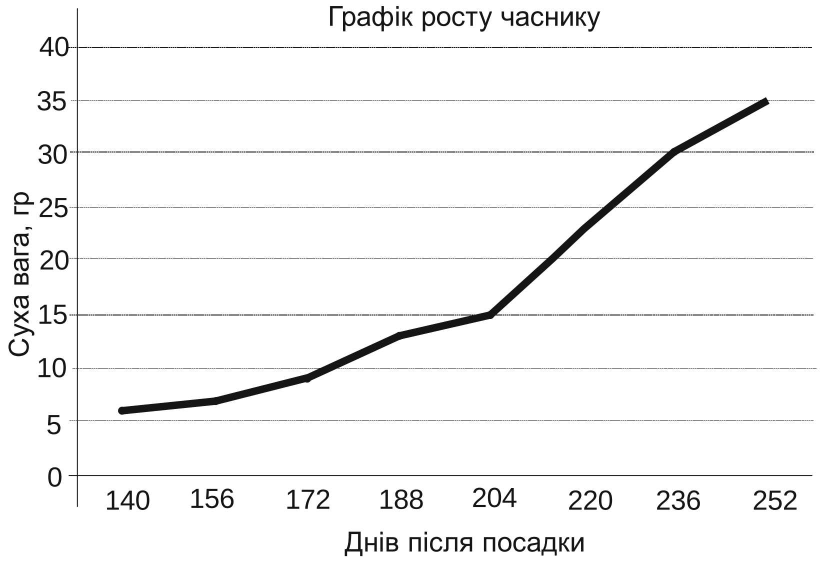


Рис. 2

Коментар. Рекомендується виконати дії на трьох функціях $y=k\cdot x$, $y=k\cdot x^2$ $y=k\cdot x^3$.

Завдання 2. Обрати будь-який агрономічний процес (вирощування кукурудзи, пшениці або іншої культури, удобрювання) та знайти його графічну або табличну інтерпретацію. Виконати підбір математичної моделі, що описує процес.

IV. Презентація результатів проєкту

Демонстрація виконання завдань №1 і №2. Починають презентації із цікавих фактів про агросферу та рівень її розвитку в Україні.

Додаток Є

Проєкт «Моя майбутня професія»

Тип проєкту: індивідуальний, прикладний, інформаційний.

Мета: *навчити учнів здійснювати аналіз майбутньої професійної діяльності засобами математики, а саме, на прикладі вивчення і дослідження властивостей та графіків лінійних функцій під час розв’язування прикладних задач професійного змісту*.

Запланований результат: учні ознайомлені з класифікацією професій (людина-людина, людина-техніка, людина-знакова система, людина-природа, людина-художній образ), презентація результатів роботи над проєктом.

І. Занурення в проєкт. Мотиваційні завдання (розв’язується під керівництвом вчителя).

Залежно від предмета, умов та знарядь праці професії поділяються за такими типами (рис.1): людина-людина, людина-техніка, людина-знакова система, людина-природа, людина-художній образ.

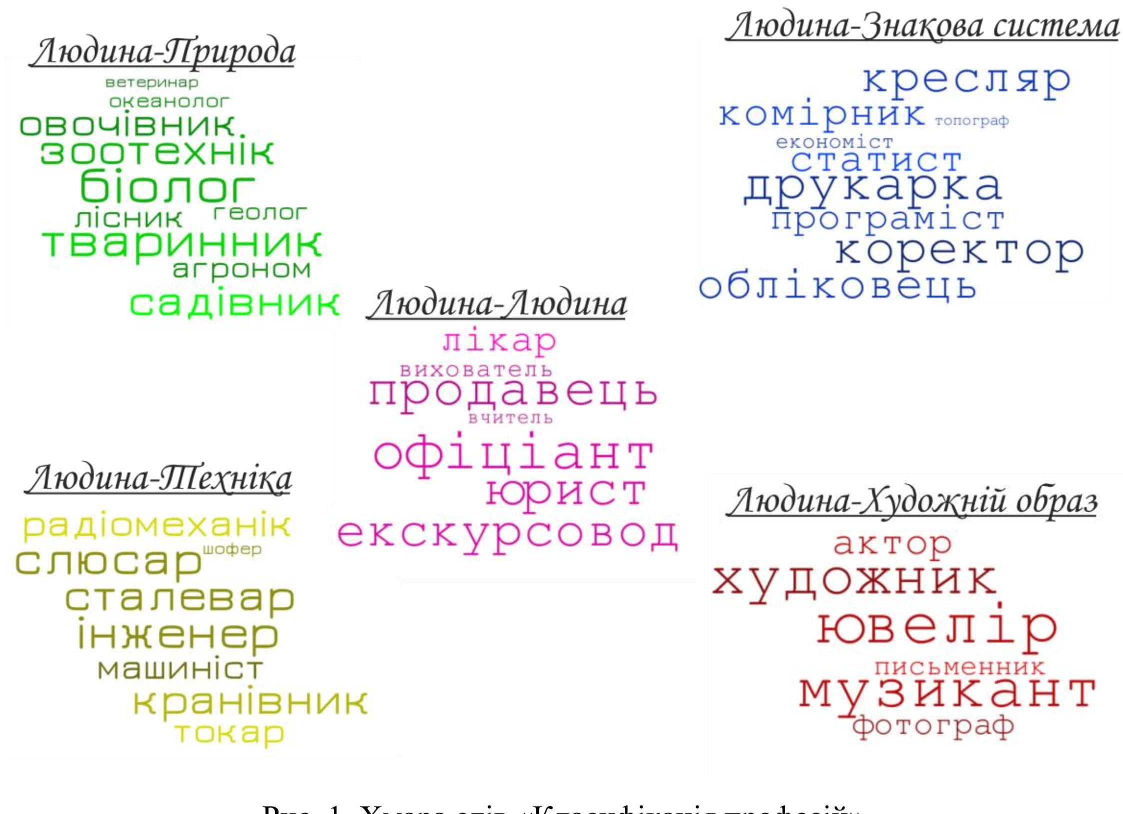


Рис. 1. Хмара слів «Класифікація професій»

Задача №1. Бібліотекар отримав за перший рік роботи 18 000 грн. Після 6-го року роботи отримав 28 000 грн. Записати вираз, який є лінією прогнозу прибутку для бібліотекаря, якщо відомо, що після кожного року роботи, він отримує підвищення заробітної плати на одну і ту ж суму.

Розв'язання. Визначимо заробітну плату бібліотекаря протягом 6 років. Нехай p – збільшення заробітної плати за рік.

Перший рік роботи: $18000 + p \cdot 0$ (грн).

Другий рік роботи: $18000 + p \cdot 1$ (грн).

Шостий рік роботи: $18000 + p \cdot 5 = 28000$ (грн).

Далі встановимо підвищення, $p = \dfrac{28000 - 18000}{5} = 2000$ (грн) за рік.

Запишемо модель прогнозу прибутку для бібліотекаря: $y(x) = 18000 + x \cdot 2000$, де x – період роботи бібліотекаря в роках, y – прибуток за рік.

Задача №2. Лінія прибутку власника магазину продуктів записана у вигляді $y(x) = 1000 \cdot x + 30000$. Якою буде заробітна плата власника магазину через 10 років ($x = 9$). Скільки йому необхідно працювати, щоб отримати заробітну плату 50000 грн в рік.

Розв'язання. Визначимо скільки грн отримав власник після 10 року своєї роботи: $y(9) = 1000 \cdot 9 + 30000 = 39000$ грн. Далі з'ясуємо скільки років йому необхідно працювати до бажаної суми.

$y(x) = 1000 \cdot x + 30000 = 50000$, $x = \dfrac{50000 - 30000}{1000} = 20$. Власнику магазину необхідно пропрацювати 21 рік, щоб отримати 50000 грн.

Задача №3. Юрій і Дмитро одночасно отримали роботу. Юрій почав працювати на посаді журналіста, а Дмитро на посаді менеджера страхової компанії. Відомо, що журналіст працюючи у газеті має початкову заробітну плату 1000 грн і отримує підвищення на 1500 грн за кожен відпрацьований рік. Менеджер у сфері страхування має початкову заробітну плату 2000 грн, а підвищення отримує на 1000 грн після року роботи. Завдання: 1) Побудувати графіки прибутку для кожного з них. 2) Через який час Юрій почне заробляти більше ніж Дмитро? 3) Юрій і Дмитро мають цільовий прибуток

25 000 грн, після якого року роботи кожен із них досягне цільового прибутку?

Розв'язання. 1) Запишемо лінії прогнозу прибутку для Юрія і Дмитра. Після чого побудуємо графіки функцій.

Таблиця 1

Юрій: $y(x) = 1500 \cdot x + 1000$.

x	0	1	2	3
$y(x)$	1000	2500	4000	5500

Дмитро: $y(x) = 1000 \cdot x + 2000$.

x	0	1	2	3
$y(x)$	2000	3000	4000	5000

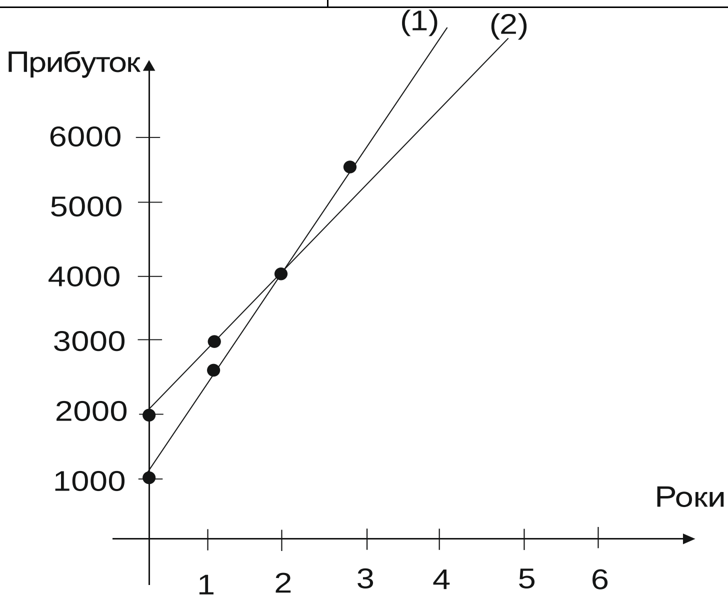


Рис. 2. Лінії прогнозу прибутку для Юрія і Дмитра

2) Юрій почне заробляти більше за Дмитра після 4 років роботи.

3) Юрій: $y(x) = 1000 \cdot x + 1500 = 25000$ грн, $x = 1000 \cdot x + 1500 = \dfrac{25000 - 1000}{1500} = 16$.

Досягне цільового доходу через 16 років.

Дмитро: $y(x) = 1000 \cdot x + 2000 = 25000$, $x = \dfrac{25000 - 2000}{1000} = 23$. Досягне цільового доходу через 23 роки.

ІІ. Організація діяльності. Реалізувати на трьох заданих професіях

Таблиця 2

Професія	Початкова заробітна плата	Інформація про підвищення
Вчитель	2912 грн	Враховуємо лише педагогічний стаж без підвищення кваліфікаційної категорії. Стаж роботи понад 3 роки, збільшення заробітної плати на 10%. Стаж роботи понад 10 років передбачає збільшення заробітної плати на 20%, а понад 20 років на 30%.
Адвокат	6000 грн	Заробітна плата зростає після кожного року роботи на 1000 грн.
Стоматолог у приватній клініці	4000 грн	Заробітна плата зростає після року роботи на 2000 грн.

Завдання

1. Записати лінії прогнозу прибутку для кожної з професій. Побудувати графіки отриманих функцій.

2. Встановити за який термін, працюючи на відповідних посадах, можна буде накопичити 24 000 грн.

ІІІ. Діяльність за проєктом

*Завдання № 1 «*Моя професія»

1.Здійснити аналіз власних умінь і знань. Обрати три професії для себе. Виписати основні вимоги до спеціалістів з обраних професій. Проаналізувати заробітну плату та її можливе підвищення.

2. Записати лінії прогнозу прибутку для кожної з професій, які ви обрали Побудувати графіки отриманих функцій.

3. Встановити за який термін, працюючи на відповідних посадах, можна буде накопичити 24 000 грн.

4. Обрати для себе найбільш вдалу на власну думку.

*Завдання № 2 «*Навчання і професія»

Завдання: обрати професію і заповнити таблицю.

Таблиця 3

Вартість освіти – p_ed за рік	
Витрати під час навчання на комунальні послуги і проживання (навчання дома =0) – util	
Заробітна плата в місяць sal	
Функція прогнозу доходу y(x), обрати приблизне підвищення заробітної плати за рік на r. Побудувати графік.	$y(x) = sal \cdot 12 + r \cdot x$, де x – термін в роках.
Встановити через який час можна відпрацювати навчання та витрати на проживання	$y(x) = (p\_ed + util) \cdot 12 \cdot t$, де t – термін навчання в роках.

IV. Презентація результатів проєкту. Кожен учень готує виступ у якому розповідає про професії, які він обрав. У доповіді демонструє виконання завдань №1 – №2.

Додаток Ж

***Проєкт* «Математичне моделювання дорожнього руху»**

Тип проєкту: індивідуальний, міжпредметний, прикладний, дослідницько-пошуковий.

Мета: *навчити учнів складати, аналізувати, інтерпретувати математичні моделі у процесі розв'язування прикладних задач; ознайомити з процесом роботи світлофора, залежностями за допомогою яких визначається тривалість зеленого сигналу; посилити уявлення про математику як метод пізнання дійсності.*

Запланований результат: учні вміють найбільш точно підбирати математичні моделі до описаних процесів; використовують знання про числові функції, числові вирази на практиці; застосовують знання з курсу фізики.

І. Занурення в проєкт. «Зелена хвиля» – це автоматична система світлофорного регулювання, яка має на увазі настроювання послідовно розташованих світлофорів таким чином, щоб при проїзді транспортного засобу час очікування зеленого сигналу був мінімальний. Таким чином, підвищується швидкість руху транспорту і скорочується кількість зупинок перед світлофором. Система розрахована на рух в місті з середньою швидкістю 40-50 км/год. Така швидкість в теорії може гарантувати водієві невпинний проїзд всієї магістралі від перехрестя до перехрестя завдяки узгодженим перемиканням сигналів світлофорів. «Зелена хвиля» спрацьовує при русі транспортних засобів на певній швидкості, яка зазвичай є рекомендованою на даній ділянці дороги. Зелений сигнал послідовно встановлених світлофорів автоматично налаштований з певним зміщенням, який розраховується виходячи з швидкості руху транспорту і відстані між світлофорами. Саме тому, щоб потрапити під «хвилю», потрібно дотримуватися швидкісного режиму.

Відповідно до внутрішньої термінології, дорожньою пробкою вважається рух зі швидкістю нижче 20 км/год по проїжджій частині і нижче 10 км/год – по малих.

ІІ. Організація діяльності.

Задача 1. Щоб розрахувати необхідний час для пішохідних світлофорів, тривалість «зеленого» сигналу вираховується за спеціальною формулою: $T = \frac{L}{3} + 5$, де T – мінімальний час пішохідної фази (в секундах), L – ширина проїжджої частини по довгій стороні переходу (в метрах), 1,3 м/с – розрахункова швидкість руху пішохода, 5 секунд – запас на «всякий випадок» для пішоходів, які маломобільні, неквапливі і такі, що запізнюються. Побудувати графік залежності часу пішохідної фази від ширини проїжджої частини і знайти значення для: $L = 3\,м$, $L = 6\,м$.

Розв'язання. У функції $T = \frac{L}{3} + 5$ коефіцієнт $k = \frac{1}{3}$, тому вона зростає на області визначення. Відповідно до умови задачі область визначення функції $L \in (0; +\infty)$. Побудуємо графік функції по точках.

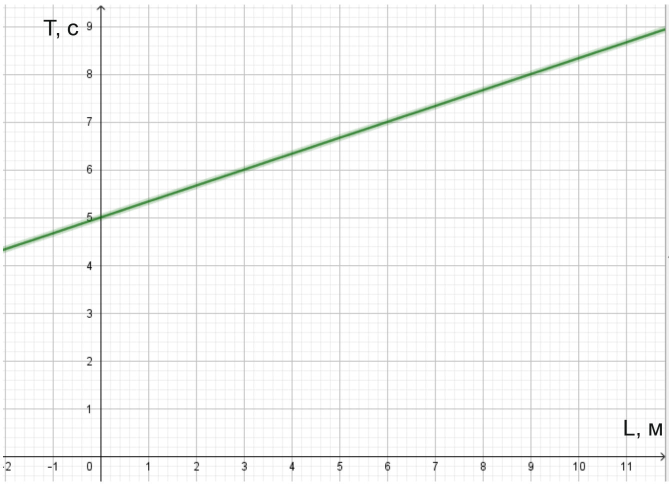


Рис.1. Графік функції

Таблиця 1

L, м	0	9
T, с	5	8

Знайдемо значення $T(3) = 4\,c, T(6) = 7\,c$.

Задача 2. Розрахуйте час зеленого сигналу для пішохідного світлофора, установленого на проїжджій частині шириною 15 м, якщо пішохід переходить дорогу із середньою швидкістю 5 км/год. (Примітка: при

Рис.2. Пішохідний світлофор

проєктуванні світлофорних об'єктів на автомобільних дорогах, на всякий випадок, обов'язково додають 5 секунд для маломобільних, неквапливих і тих, хто запізнився).

Розв'язання. Математична модель: $t = \frac{l}{3} + 5$. Тоді, $t = \frac{15}{3} + 5 = 10\ c$.

Задача 3. На проїжджій частині установлений світлофор, який перемикається після натискання спеціальної «пішохідної» кнопки (рис. 5) і дозволяє перехід протягом певного часу після цього. Яка довжина черги автомобілів, що чекають проїзду, утвориться після вмикання дозволяючого сигналу для пішохода, якщо ширина дороги 16 метрів, швидкість автомобілів 20 км/год, пішоходи переходять вулицю зі швидкістю 5 км/год.

Рис.3. Пішохідна кнопка

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі: $\begin{cases} l = v \cdot t \\ H = v_n \cdot t \end{cases}$,

$$l = v \cdot \left(\frac{H}{v_n} + 5 \right) = 5{,}56 \cdot \left(\frac{16}{1{,}39} + 5 \right) \approx 91{,}8\ м.$$

ІІІ. Діяльність по проєкту

Задача 4. На рисунку зображена ділянка дороги, обладнана чотирма світлофорами і показана періодичність зміни їх сигналів. З якою швидкістю має рухатися автомобіль на окремих ділянках дороги, щоб проїхати без зупинок (спіймати так звану «зелену хвилю»). Яка середня швидкість руху автомобіля на цьому шляху?

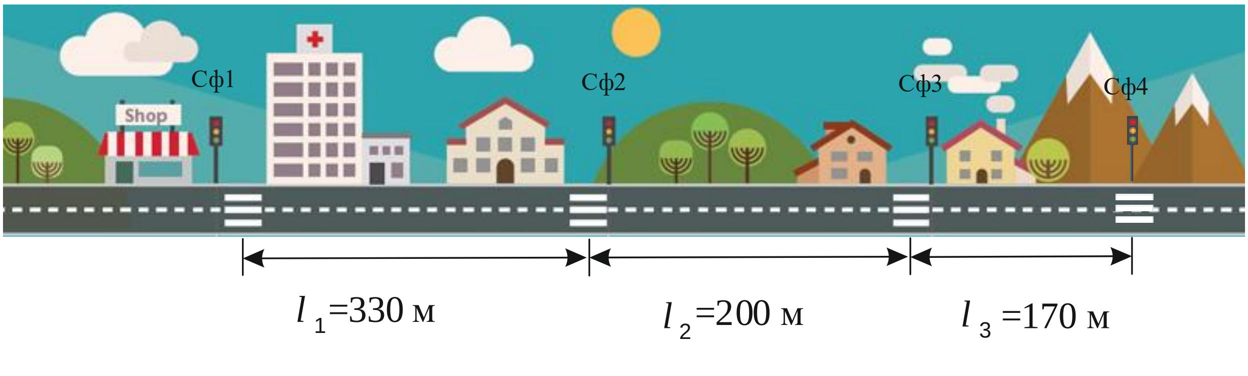


Рис.4. Математична модель руху транспортних засобів

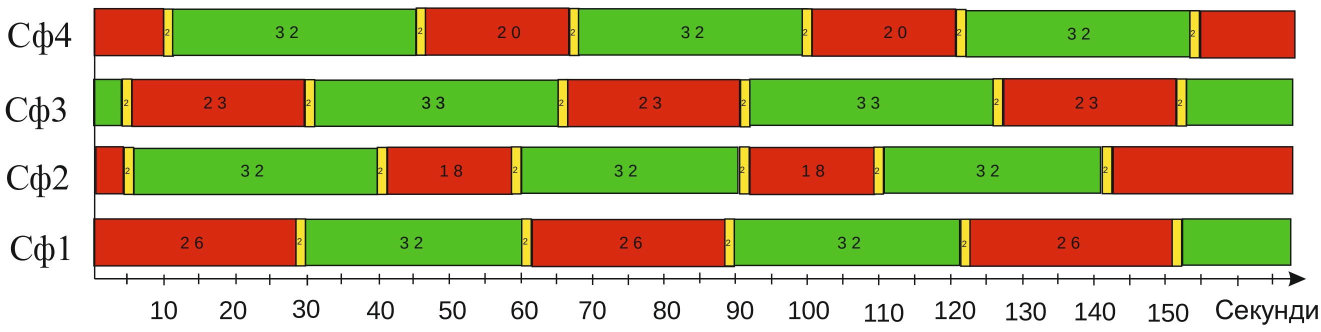


Рис. 5. Графік вмикання сигналів світлофорів

Розв'язання. Математична модель:

$$v_1 = \frac{l_1}{t_2} = \frac{330}{32} = 10{,}3\,\frac{м}{с} = 10{,}3 \cdot \frac{3600}{1000} \approx 37\,\frac{км}{год},\qquad v_2 = \frac{l_2}{t_3} = \frac{200}{33} = 6{,}06\,\frac{м}{с} \approx 21{,}8\,\frac{км}{год},$$

$$v_3 = \frac{l_3}{t_4} = \frac{170}{32} = 5{,}31\,\frac{м}{с} \approx 19{,}1\,\frac{км}{год}.$$

Для того, щоб знайти середню швидкість необхідно:

$$v_{сер} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{t_2 + t_3 + t_4} = \frac{330 + 200 + 170}{32 + 33 + 32} = 6{,}18\,\frac{м}{с} \approx 22{,}2\,\frac{км}{год}.$$

Після розв'язання задачі учням необхідно виконати завдання.

Завдання №1. Обрати місце, де на вашу думку необхідно встановити світлофор, а він відсутній. Користуючись Google Maps або іншими засобами визначте ширину цієї проїжджої частини. Розрахуйте час зеленого сигналу для пішохідного світлофора, установленого на проїжджій частині виміряною шириною, якщо пішохід переходить дорогу із середньою швидкістю 5 км/год.

Завдання №2. Обрати пряму вулицю у власному місті на якій розміщені чотири світлофори. Секундоміром визначити тривалість червоного і зеленого сигналів світла. За вимірами створити рисунок аналогічний до рис. 4. Визначити, з якою швидкістю має рухатися автомобіль на окремих ділянках дороги, щоб проїхати без зупинок (спіймати так звану «зелену хвилю»). Яка середня швидкість руху автомобіля на цьому шляху?

Завдання №3 (розв'язати задачу). Водій вантажного автомобіля за 150 м до залізничного переїзду помітив, що ввімкнувся забороняючий сигнал світлофора, а спідометр показував 54 км/год. Після зупинки автомобіля товарний потяг наблизився до переїзду через 1 хвилину 40 секунд, забороняючий сигнал вимкнувся через 30 секунд після проходу потягу, а всього переїзд був закритий 3 хвилини 30 секунд. У водія виникло запитання: з якою швидкістю рухався потяг, якщо він нарахував у складі залізничного потягу вантажний двосекційний локомотив і 61 критий вагон (довжина двосекційного локомотива – 32 м, довжина вагона – 15,75 м).

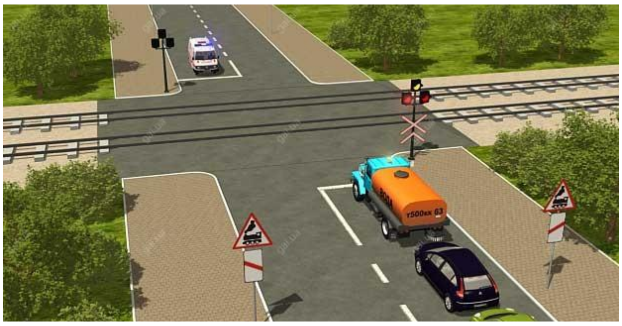


Рис. 6. Світлофор на залізничному переїзді

Розв'язання. $t_3 = T - t_1 - t_2 - t_4$ – час руху потягу повз переїзд, T – час протягом якого переїзд був закритий, t_2 – час, за який потяг наблизився до переїзду, t_4 – час увімкнення забороняючого сигналу, t_1 – час руху автомобіля до зупинки біля переїзду.

$$\begin{cases} S = v_0 \cdot t - \dfrac{a \cdot t_1^2}{2} \\ 0 = v_0 - a \cdot t_1 \end{cases}$$ (кінематичні рівняння для рівносповільненого руху),

$S = \dfrac{v_0 \cdot t_1}{2}$, $t_1 = \dfrac{2 \cdot S}{v_0}$. Швидкість потягу: $v_n = \dfrac{x_1 + n \cdot x_2}{t_3} = \dfrac{x_1 + n \cdot x_2}{T - \dfrac{2 \cdot S}{v_0} - t_2 - t_4}$, де x_1 – довжина локомотиву, n – кількість вагонів, x_2 – довжина одного вагону.

$v_n = \dfrac{32 + 61 \cdot 15{,}75}{210 - \dfrac{2 \cdot 150}{15} - 100 - 30} \approx 16{,}54 \dfrac{м}{с}$. *Відповідь:* швидкість потягу становила $60 \dfrac{км}{год}$.

IV. Презентація результатів проєкту

Учні створюють презентації у яких демонструють результати виконання завдань №1–№3. Починають презентації із цікавих фактів про принципи роботи світлофорів на різних ділянках проїжджої частини.

Додаток З

Орієнтовне планування навчальної практики для учнів основної школи

	Тема	**години**
7 клас		
1	Фотовиставка «Алгебра навколо нас»	4
2	Математика у моїй родині	4
3	Математика у сільському господарстві	8
4	Екскурсія до ветеринарної клініки	4
5	Ринок цінних паперів	4
6	Математика у медицині	4
7	Квест від банку щодо фінансової грамотності	4
8	Створення власного блогу присвяченого прикладним задачам	4
9	Робота над проєктом «Моя майбутня професія»	4
8 клас		
1	Використання програмного засобу GeoGebra у процесі розв’язування прикладних задач	4
2	Робота у редакційно-видавничому центрі	4
3	Знайомство з базами даних у туристичній фірмі	4
4	Фінансова математика	4
5	Ринок цінних паперів	4
6	Екологічний квест	4
7	Квест від банку щодо фінансової грамотності	4
8	Створення власного блогу присвяченого застосуванню математики	4
9	Робота над проєктом «Математичне моделювання дорожнього руху»	4
10	Робота над проєктом «Застосування методу математичного моделювання в агрономії»	4

Додаток И

Програма з проведення навчальної практики учнів 8-го класу в редакційно-видавничому центрі

Зручно розділити клас на групи по декілька учнів, кожна з яких проходить програму у певній послідовності. Це дозволить контролювати і спрямовувати роботу кожного учня. Учням необхідно вести щоденники практики, в яких вони відмічають тему заняття, час, вид практичної роботи, результати своєї роботи у вигляді проєкту. Оцінка за практику виставляється на заключній конференції.

Планування навчальної практики учнів 8-х класів

№ п/п	Теми	Норми навчальної роботи		
		Всього	Теоретичної	Практичної
I. Видавництво та його структура				
1.	Вступ. Етапи редакційно-видавничого процесу	2	2	
II. Матеріально-технічна база РВЦ				
2.	Основи роботи ксерокопіювального апарату	3	2	1
3.	Різограф	2	1	1
4.	Основні засоби «зшивання» макету книги	2		2
5.	Фотоапарати та цифрові пристрої	1	1	1
III. Основи макетування і верстки				
6.	Основні програмні засоби, що використовуються для верстки (Microsoft Word)	4	2	2
7.	Вимоги до оформлення макету	4	2	2
8.	Основи коректури. Підготовка макету до друку	4	2	2
9.	Обкладинка. Створення обкладинки засобами середовища CorelDraw	4	2	2
IV. Поліграфічна продукція учнів				
10.	Буклет. Основні вимоги до створення буклету	5	1	4
11.	Шкільна газета. Основні вимоги до створення газети	5	1	4
12.	Дидактичні картки	5	1	4
13.	Настінні плакати типу «Сьогодні	5	1	4

	на уроці»			
Підсумкова конференція з навчальної практики				
14.	Захист навчальних проєктів. Виставка робіт учнів	2		

Розглянемо коротко зміст окремих тем програми практики.

I. Видавництво та його структура. Згідно із законом України «Про видавничу справу» від 5 червня 1997 року видавнича справа – сфера відносин, що поєднує в собі організаційно-творчу та виробничо-господарську діяльність юридичних і фізичних осіб, зайнятих створенням, виготовленням і розповсюдженням видавничої продукції [172, с. 12].

Видавнича організація є підприємством, установою, організацією, статутом якої передбачено підготовка та випуск видань. Успішність роботи видавництва залежить від кваліфікації авторів та актуальності творів. Основні етапи видавничої діяльності: підготовча, редакційна, виробнича, збутова, маркетингова).

Підготовчий етап починається задовго до того, як редактор за допомогою технічних засобів почне працювати з авторським оригіналом (авторський оригінал після обробки і редагувань стає видавничим оригіналом).

На редакційному етапі здійснюється рецензування, безпосереднє редагування, художнє оформлення, макетування, коректура тексту, зчитування (зіставлення зверстаного варіанту відредагованого видання з його оригіналом), вичитування (усунення орфографічних, пунктуаційних, літерних помилок, правильне розміщення знаків, дотримання принципів уніфікації й однакового стилю подання тексту), виведення оригінал-макета, оформлення зовнішньої частини видання.

Виробничий етап полягає у виборі поліграфічного підприємства й укладання з ним договору на друк та передачу оригінал-макета з необхідними документами (лист видавництва, комплектний оригінал, технічна видавнича специфікація й договір з поліграфічним підприємством).

Маркетинговий етап настає після отримання документів редактором від автора. Тут починається продумування і організація заходів, спрямованих на просування на книжковому ринку конкретного видавничого продукту, щоб краще можна було його реалізувати.

Очолює видавництво головний редактор, який бере участь у розробці видавничих планів, координує роботу, пов’язану з формуванням авторського середовища у відповідності до профілю діяльності видавництва, координує роботу редакційної частини видавництва, здійснює відбір рукописів, визначає їх доцільність. Редактор працює з автором рукопису, здійснює контроль версток, коректури [172, с. 154].

Виробничий підрозділ призначений для виготовлення редакційних оригіналів, погодження всіх питань з поліграфічними підприємствами з накладу творів. Додрукарські процеси на сьогоднішній день здійснюються видавництвами. Підготовка і випуск видання складний колективний процес, тому важливою є налагодженість зв’язків між підрозділами.

Підрозділ реалізації та маркетингу організовує і спрямовує роботу реклами , пропаганди і збуту друкованої продукції.

Крім підрозділів, що здійснюють підготовку видання, до організаційної структури видавництва в залежності від його розмірів можуть входити бухгалтерія, економічний відділ, юридичний відділ, відділ кадрів. Під час створення видавництва необхідно забезпечити належний кадровий і ресурсний потенціал.

Така структура видавництва вимагає наявності спеціалістів і професіоналів з різних галузей науки (гуманітарних, технічних, суспільних), для роботи потрібні бухгалтери, юристи, редактори, інженери-програмісти. Залучення учнів до видавничої діяльності дозволить їм потрапити в умови праці і підготувати їх до майбутньої професійної діяльності, навчитися працювати у колективі, виконувати робочі обов’язки, застосовуючи при цьому набуті під час навчального процесу знання.

ІІ. Матеріально-технічна база РВЦ. Основою роботи сучасного видавництва є засоби цифрової обробки, передачі і зберігання інформації, тому співробітники мають володіти високим рівнем комп'ютерної грамотності. Перелік обладнання з яким мають ознайомитися учні: комп'ютери для верстки, принтери, сканери, ксерокопіювальні апарати, різограф, степлер для брошур, пристрій для ламінування.

Головним інструментом роботи редакційно-видавничого центру є сучасний *стаціонарний комп'ютер* або *ноутбук*. Для створення друкованого макету використовуються у редакційному центрі принтери: чорно-білі і кольорові. Для роботи із зображеннями у редакції використовується *сканер* . У теперішній час сканер являється у більшій мірі побутовим приладом, ніж основним засобом отримання цифрованої графічної інформації, однак з його допомогою можна оцифровувати документи, художні ілюстрації та інші матеріали з паперових носіїв. З *цифровим фотоапаратом* учні добре знайомі, він може суміщати декілька функцій одночасно, як фото, так і запис відео. Також учні мають отримати під час практики уявлення про *різограф* − копіювальний апарат для тиражування паперової продукції незначних та середніх тиражів.

У редакційній роботі використовується як загальне програмне забезпечення, так і спеціальне. Програмні пакети умовно можна розділити: для роботи журналістів, фотографів, редакторів, дизайнерів, інфографіків. Для створення текстів потрібні такі програми як: Microsoft Word - робота з текстом, Microsoft Excel - для роботи з числовими масивами і таблицями, Adobe Photoshop - обробка фотографій, Voice Studio - для обробки аудіофайлів з диктофона, ABBYY FineReader - для розпізнавання тексту з паперових носіїв, разом з цим у журналіста не повинно викликати труднощів використання різних Інтернет-браузерів (Explorer, Opera, Mozilla FireFox), а також використання програми для відеоконференцій Skype, Zoom, Google Meet і програм для оперативної комунікації – Viber, Telegram, WhatsApp. У роботі фотографів і більд-редакторів необхідні: набір програм для роботи з растровою графікою пакету Adobe Creative Suite – Photoshop, з векторною графікою Corel Draw. Для створення і редагування електронних видань формату PDF необхідно використовувати Adobe Acrobat.

ІІІ. Основи макетування і верстки. Редагування – це один з етапів редакційно-видавничого процесу, який передбачає технічні, творчі, організаційні дії редактора, що спрямовані на вдосконалення змісту й форми призначеного до друку твору, приведення його до загальноприйнятих вимог.

Основні етапи редагування: *перше наскрізне читання*, де редактор детально читає весь текст, визначає його сильні та слабкі сторони, вивчає зміст, структуру, визначає обсяги свого втручання в текст; *доведення оригіналу до комплектності* (за участі автора) і виявлення складових, що відсутні; *робота над структурою оригіналу*, тобто ряд пропозицій редактора щодо удосконалення структури видання; *визначення єдиного стилю подання тексту*, тут редактор, дотримуючись основних вимог, визначає і задає форми розміщення основного службового або допоміжного текстів, змісту, виділення заголовків, бібліографії, виробивши певний стиль необхідно його дотримуватись в усьому тексті; *робота над заголовками*, необхідна для визначення ієрархії в основній частині видання, і для їх графічного відтворення, на сторінках, головним на цьому етапі є досягнення чіткості, логічності викладу.

Види редагування розділені на два блоки: загальне і спеціальне. Загальне редагування – це цілісна робота редактора над оригіналом, перевірка достовірності фактичного матеріалу за допомогою літератури. Спеціальне редагування – це художньо-технічне (художнє оформлення видання, моделювання обкладинки), літературне (аналіз, виправлення літературної частини твору), наукове (виявлення наукових неточностей) редагування.

Далі макет коректують, тобто усувають помилки видавництва й автора, не помічені раніше, які виникли після створення макету, виправляють усі помилки, допущені друкарнею через відхилення від оригіналу, усувають технічні недоліки набору й репродукування.

Далі учні знайомляться із основними технічними правилами верстки.

IV. Поліграфічна продукція учнів. Для учнів 8-го класу важливим є створення продукту (кінцевого результату) діяльності з наступними умовами його оцінки і ситуації успіху, тому під час практики пропонується створення учнями власноруч, на основі матеріальної бази редакційного відділу, наочних засобів, які будуть використовуватись ними впродовж подальшого вивчення навчальних предметів: дидактичні картки, буклети, газети, плакати типу «Сьогодні на уроці».

Під *дидактичним роздатковим матеріалом* ми розуміємо особливий тип навчальних посібників, переважно картки або набори карток, що містять різні навчальні завдання, сформульовані у словесній або словесно-наочній формі, що враховують наявні в учнів знання та інтереси.

Для організації самостійної роботи учнів у позаурочний час використовуються *таблиці типу «Сьогодні на уроці»* − друковані площинні наочні посібники, що містять текстовий та ілюстративний матеріал у вигляді рисунків, креслень, схем [114].

Буклет – багатокольорові друковані аркуші, складені у два, або більше згинів. Такого виду друкована продукція являється матеріалом для презентації, що створює вплив на імідж навчального закладу. Це вид навчальної продукції, яка може містити інформацію про різні сторони життєдіяльності навчального закладу. Створюватися може з допомогою текстового редактора Word Publisher, або редактора Page Macker. Завдання, які отримують групи учнів для створення буклетів орієнтовані на різні цільові аудиторії (інформаційний буклет для батьків, презентаційний буклет навчального закладу, презентаційний буклет для реалізації навчального проєкту).

Загальношкільна газета в системі виховної роботи є одним із ефективних засобів організації класних колективів і школи у вихованні та освіті підростаючого покоління. Вона допомагає віддзеркалювати досягнення і недоліки в житті класу та окремих учнів і вказує шляхи подолання труднощів. На позитивних прикладах шкільна преса показує досягнення і зростання колективу і тим самим сприяє вихованню у школярів сумлінного ставлення до праці і громадських доручень.

Додаток Й

Анкета для учнів 7–9 класів загальноосвітньої школи

1. Укажіть шкільний предмет (один), який, на ваш погляд, є найважливішим з-поміж інших навчальних предметів.
2. Укажіть причину такого вибору.
3. Який предмет в школі подобається Вам найбільше?
4. Вкажіть причину вибору.
5. Оцініть значимість математики для Вас у балах: 0 балів – є непотрібною ні в теперішньому, ні в майбутньому; 1 бал – потрібна лише для вступу; 2 бали – необхідна для навчання у закладі вищої освіти; з нею частково або повністю пов'язана майбутня професія; 3 бали – нині є запорукою успішного майбутнього.
6. Який математичний предмет – алгебра чи геометрія – подобається Вам більше? Чому? Вкажіть одну причину.
7. Що Вам подобається у процесі вивчення алгебри?
8. Чи можна використати алгебраїчні знання для інших шкільних предметів? Якщо «так», то перерахуйте ці предмети.
9. Знання із яких шкільних предметів допомагають на уроках алгебри?
10. Чи пов'язані знання з курсу алгебри із реальним світом? Можливо, алгебра є суто абстрактною?
11. Чи використовуються знання із курсу алгебри у повсякденному житті?
12. Яким чином, на Вашу думку, можна покращити вивчення алгебри у основній школі?

Додаток К

Анкета для вчителів математики загальноосвітніх шкіл

1. *Як Ви розумієте прикладну спрямованість математики?*

____

____

____

2. *Чи можна вважати прикладну спрямованість математики одним із шляхів розв'язання завдань, які сформульовано сьогодні в математичній освіті?*

А) так

Б) ні

В) не знаю

3. *Які засоби її реалізації є найкращими?*

А) приклади застосування теорії

Б) міжпредметні зв'язки

В) прикладні задачі

Г) показ реальності походження алгебраїчних абстракцій

Д) комплексне використання вказаних засобів

Е) інше ____

4. *Чи використовуєте Ви у своїй діяльності прикладні задачі?*

А) так

Б) ні

В) іноді

5. *Чи потрібно розв'язувати прикладні задачі на уроках алгебри? Чому?*

А) так

Б) ні

В) іноді

6. *Укажіть, будь ласка, джерела прикладних задач курсу алгебри, які Ви використовуєте.*

А) чинний підручник

Б) підручники попередніх років

В) збірники задач

Г) інше ____

7. *Чи використовуєте Ви прикладні задач у процесі вивчення курсу алгебри ?*

А) так, використовую

Б) використовую несистематично

В) ні, але хочу використовувати

Г) ні, я не використовую і не планую

Д) інший варіант відповіді

8. *Чи потрібно передбачати прикладні задачі для оцінювання навчальних досягнень учнів?*

А) так

Б) ні

9. *Чи потрібно передбачати прикладні задачі для складання ЗНО?*

А) так

Б) ні

10. *Повідомте, будь-ласка, Ваш стаж роботи та категорію.*

____

Дякуємо за участь в анкетуванні!

Додаток Л

Зразок контрольної роботи у 7-му класі

Задача №1. Крапельниці (або внутрішньовенні вливання) використовують для лікування пацієнтів медичними препаратами за допомогою рідини. Швидкість капання A визначається у краплях за хвилину. При цьому використовується формула $A = \frac{d \cdot V}{60n}$, де d – коефіцієнт капання, який вимірюється в краплях на мілілітр, V – об'єм крапельниці в мілілітрах, n – кількість годин, необхідних для проведення вливання. Медична сестра збільшила час вливання вдвічі, при цьому d і V не змінюються. Опишіть як зміниться А.

Задача №2. За першу подорож турист витратив 20% своїх заощаджень, що він накопичував, а за другу подорож 25% від суми, що залишилась. Після цього на картці залишилось на 200 євро більше, ніж було витрачено за обидві подорожі. Скільки грошей собі накопичив турист на подорожі.

Задача №3. Залежність тиску рідини $p\,(Па)$ від глибини занурення у неї $h\,(м)$ задана у вигляді $p\,(h) = \rho \cdot g \cdot h$, де $\rho \left(\frac{кг}{м^3}\right)$ − густина рідини, $h\,(м)$ − глибина на якій визначається тиск, $g = 10\,\frac{Н}{м}$ − показник тяжіння. Відомо, що густина морської води $\rho = 1030\,\frac{кг}{м^3}$, а прісної $\rho = 1000\,\frac{кг}{м^3}$. Запишіть функції, які відображають залежність тиску від глибини занурення окремо у прісній і морській воді. Складти таблицю значень отриманих функцій. Побудувати на одному рисунку графіки отриманих функцій, зробити їх порівняння.

Задача №4. Норми спаду ваги охолодженого м'яса при його збереженні при температурі від +4°C до 0°C задані у таблиці . Записати аналітичний вигляд функції і побудувати ї графік. Здійснити відповідні дослідження для м'яса масою 40 кг.

Таблиця 1

Процес збереження охолодженого м'яса

Термін зберігання охолодженого продукту			
1 день	2 день	3 день	Примітка
0,4 %	0,6 %	0,8 %	При збереженні продукту у охолодженому вигляді терміном більшим за 3 дні подальший спад маси нараховується у розмірі 0,02 % від маси на третій добі.

Додаток М

Зразок контрольної роботи у 8-му класі

Задача №1. Дано графік, що відображає залежність атмосферного тиску p (мм рт. ст.) від висоти h (км) над рівнем моря. Використовуючи графік, встановити вигляд функції, побудувати таблицю значень і дослідити її.

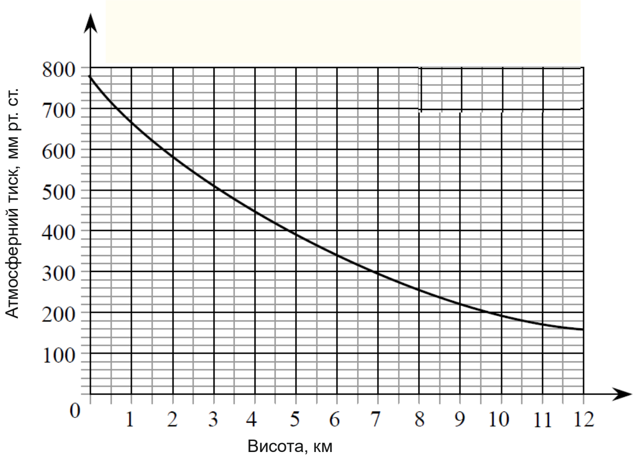


Рис. 1

Задача №2. Працівники відділу технічного контролю перевіряють виготовлений із яблук сік за такими критеріями: колір, смак, аромат. Готовий сік повинен бути прозорим, не кислим, і мати коричневий відтінок та аромат яблука. Після чого сік розливають на лініях по 0,2 л і 1 л. Технологи на обох лініях розливу проконтролювали за зміну 73600 л. Після того як технолог на лінії розливу 0,2 л підвищив продуктивність праці на 15%, а другий технолог на 25%, разом вони за зміну проконтролювали розлив 91040 л.

Задача №3. У ставок рибного господарства було запущено 10 тон однорічного малька. Через два роки при вилові було виявлено 100 тон промислової риби. Визначити щорічний приріст риби у відсотках, якщо на третьому році риба набирає вагу у два рази повільніше ніж на другому.

Рис.2

Задача №4. Земельну ділянку прямокутної форми площею 480 м^2 виділили під будівництво офісного центру. Необхідно огородити її 31 листом бляхи шириною 3 м. Якими повинні бути сторони цієї ділянки ?

Додаток Н

Зразок контрольної роботи у 9-му класі

Задача №1. Рівень води у зрошувальному каналі змінюється за формулою $h = 0{,}5 \cdot t^2 - 15 \cdot t + 113$, де h − висота рівня води, t − час, що відраховується від початку дня. Визначити у які години рівень води піднімався, а у які опускався? Якого найвищого рівня досягала вода у каналі?

Задача №2. У мережі магазинів «Спортивна родина» і «СпортМега» розпродаж. «Спортивна родина» провела акцію: ціну на пару кросівок знизили на 20%, потім нову ціну ще на 25%, після чого ціна становила 1200 грн. У «СпортМега» ціну на пару кросівок 1500 грн знизили на 25%, потім нову ціну знизили ще на 40%. Якою була ціна товару у магазинах до і після знижок? На скільки відсотків знизилась ціна товарів у кожному з магазинів?

Задача №3. Комунальні послуги за один місяць складають: 98 $кВт \cdot год$ електроенергії, 12 м^3 води і 80 м^3 газу. Розрахувати, скільки грошей залишиться у родини, якщо до сімейного бюджету за рахунок заробітної плати, за місяць надходить не більше 18 000 грн.

Таблиця 1

Комунальні послуги

Послуга	***Вартість***
Електроенергія	E<100 кВт: 90 коп за кВт, 100<E<600 кВт: 1 грн 68 коп за кВт
Вода	20 грн за 1 м^3
Газ	7 грн за 1 м^3
Квартплата	230 грн за місяць

Задача №4. Волейболіст під час тренування кидає м’яч над собою вертикально вгору на висоту 1,5 м. За допомогою спеціального радару було встановлено, що швидкість м’яча становила 12 $^{м}/_{с}$. Запишіть залежність між висотою та часом підкидання волейбольного м’яча, побудуйте її графік і встановіть максимальну висоту на яку піднімається м’яч, і час його падіння на землю. Зріст волейболіста − 1 м 80 см.

Додаток О

Результати опитування учнів основної школи

Рис.1

Рис. 2

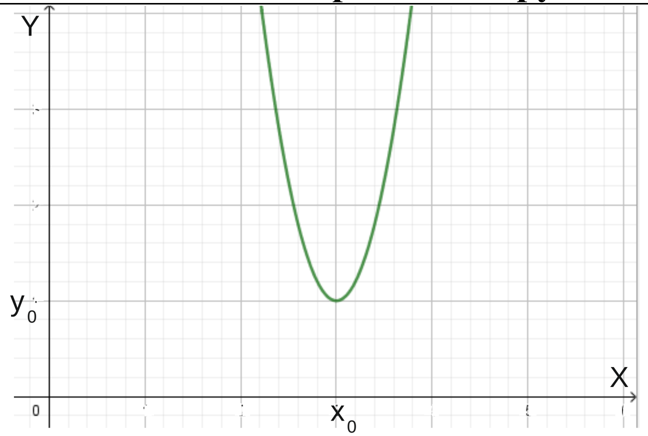
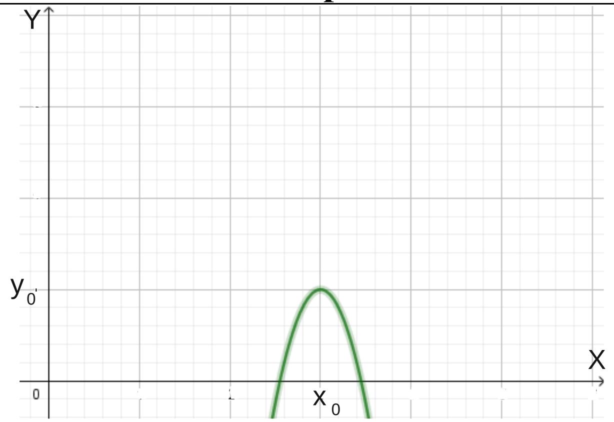
Рис. 3

Рис. 4

Додаток П

Алгоритм дослідження квадратичної функції

1. Визначити напрям віток параболи ($a > 0$ вітки вгору, $a < 0$ вітки параболи вниз).
2. Знайти координати вершини параболи $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$. Уже на цьому етапі можна буде встановити область визначення і множину значень функції.

$a > 0$, **вітки параболи вгору**	$a < 0$, **вітки параболи вниз**
	
$x \in (-\infty;+\infty)$ $y \in (y_0;+\infty)$	$x \in (-\infty;+\infty)$ $y \in (-\infty; y_0)$

3. Визначити нулі функції $f(x)=0$.
4. Знакосталість. Вивчення й дослідження цієї властивості отримає подальше застосування у розкритті теми «Квадратна нерівність».

$a>0$, **вітки параболи вгору**			$a<0$, **вітки параболи вниз**		
Рівняння виду $f(x)=0$:			Рівняння виду $f(x)=0$:		
Два розв'язки $x_1<x_2$	Один розв'язок $x_1=x_2=x_0$	Жодного	Два розв'язки $x_1<x_2$	Один розв'язок $x_1=x_2=x_0$	Жодного
$f(x)<0$: $x\in(x_1;x_2)$; $f(x)>0$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$f(x)>0$ $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	$f(x)>0$ на всій області визначення	$f(x)>0$: $x\in(x_1;x_2)$; $f(x)<0$: $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$f(x)<0$ $x\in(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	$f(x)<0$ на всій області визначення

5. Знайти точки перетину з віссю ОУ.
6. Монотонність.

$a>0$, **вітки параболи вгору**	$a<0$, **вітки параболи вниз**
$\uparrow$ $x\in(x_0;+\infty)$ $\downarrow$ $x\in(-\infty;x_0)$	$\uparrow$ $x\in(-\infty;x_0)$ $\downarrow$ $x\in(x_0;+\infty)$

Додаток Р

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМАТИКОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях

1. Чінчой А. О. Математичне моделювання як засіб здійснення міжпредметних зв'язків курсу алгебри. *Наукові записки. Вип. 9. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Ч.1.* Кіровоград : РВВ КДПУ імені Володимира Винниченка, 2016. С. 54–61.

2. Новікова А. О., Швець В. О. Система задач з теми «Нерівності» як засіб реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 18 :* збірник наукових праць. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 170–178. *(Особистий внесок здобувача: описано систему прикладних задач з теми «Нерівності», виокремлено типи та рівні складності прикладних задач)*.

3. Новікова А. О. Змістова лінія тотожні перетворення в контексті прикладної спрямованості курсу алгебри. *Наукові записки . Вип. 12. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3.* Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2017. С. 37−41.

4. Новікова А. О. Використання програмного забезпечення GeoGebra під час розв'язування прикладних задач змістової лінії «Функції та їх графіки». *Наукові записки. Вип. 169. Серія: Педагогічні науки.* Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 112−115.

5. Новікова А. О., Чінчой О. О. Використання науково-технічного потенціалу агропромислових виставок для реалізації методів математичного моделювання в курсах алгебри і фізики загальноосвітньої школи. *Наукові*

записки : [збірник наукових статей] / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т імені М. П. Драгоманова. Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Випуск CXXXXI(141). 280 с. (Серія педагогічні науки). С. 156–162. *(Особистий внесок здобувача: окремі складники змісту та проєкт)*.

6. Ботузова Ю. В., Новікова А. О. Використання інтерактивної дошки на уроках математики. *Наукові записки. Вип. 168. Серія: Педагогічні науки.* Кропивницький : РВВ ЦДПУ імені Володимира Винниченка, 2018. С. 47−52. *(Особистий внесок здобувача: розроблено особливості методики використання Smart Notebook і Learningapps на уроках математики)*.

7. Швець В. О., Новікова А. О. Математичне моделювання в курсі алгебри під час розв’язування задач на рух. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та середній школі. Випуск 20:* збірник наукових праць. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. С. 70–76. *(Особистий внесок здобувача: продемонстровано використання методу математичного моделювання в процесі розв’язування прикладних задач на рух)*.

8. Чінчой А. О. Організація і проведення навчальної практики старшокласників у редакційно-видавничому центрі. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Випуск 40:* збірник наукових праць. Київ, 2013. С. 269–273.

9. Чінчой А. О. Створення математичних задач з елементами історизму як засіб формування пізнавального інтересу учнів гуманітарних класів. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: Реалії та перспективи. Випуск 47: збірник наукових праць.* Київ, 2014. С. 295–300.

10. Чінчой А. О. Використання археологічного матеріалу на уроках математики. *Наукові записки. Випуск 6. Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина ІІ.* Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2014. С. 34–39.

Публікації у закордонних виданнях

11. Новикова А. Система задач как средство реализации прикладной направленности курса алгебры. *Univers Pedagogic. Revistă de Pedagogie şi Psihologie a Institutului de Ştiințe ale Educaţiei.* 2017. Nr.4 (56). C. 48 – 52.

12. Швец В. А., Новикова А. А. Прикладная направленность курса алгебры. *Годишник на ШУ „Епископ К. Преславски" Факултет по математика и информатика, том XVIII C, 2017, с. 105*–117. *(Особистий внесок здобувача: досліджено особливості реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри, розроблено прикладні задачі)*.

Публікації в науково-методичному журналі

13. Чінчой А. О. , Швець В. О. Математичне моделювання як один із методів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. *Математика в рідній школі*, 2016. № 9. С. 27–30. *(Особистий внесок здобувача: продемонстровано розв'язання прикладних задач, розроблених за змістовими лініями курсу алгебри основної школи за методом математичного моделювання)*.

14. Новікова А. О. Навчальний проект як засіб формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання. *Математика в рідній школі*, 2018. № 11. С. 44–47.

Матеріали науково-практичних конференцій інших держав

15. Новикова А. А., Швец В. А. Прикладная направленность курса алгебры основной школы. *Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы:* материалы Международной научно-практической конференции, Минск, 10 – 13 мая, 2017 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка; редкол. С. И. Василец (отв. ред.) [и др.]. : Минск: БГПУ, 2017. С. 122 –124. *(Особистий внесок здобувача: окремі складники змісту)*.

Матеріали та тези науково-практичних конференцій

16. Чінчой А. О. Розв'язування задач міжпредметного змісту методом математичного моделювання. *Засоби і технології сучасного навчального середовища*: Матеріали конференції, м. Кіровоград, 27–28 травня 2016 р. /

Відповідальний редактор: С. П. Величко. Кіровоград: ПП «Ексклюзив Систем», 2016. С. 64–66.

17. Чінчой А. О. Прикладна спрямованість курсу алгебри основної школи. *Реалізація наступності в математичній освіті: Реалії та перспективи:* збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Одеса, 15–16 вересня 2016 р. Харків: Вид-во «Ранок», 2016. С. 129–131.

18. Новікова А. О. Система задач як засіб реалізації прикладної спрямованості курсу алгебри основної школи. *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова», 11–13 травня 2017 р.,* м. Київ, Україна. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 28 –29.

19. Новікова А. О. До питання про створення системи прикладних задач з курсу алгебри основної школи. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики:* зб. наук. праць за матеріалами міжнар. наук.-практ. конф., 30 травня–1 червня 2018 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. С. 155 – 158.

20. Новікова А. О. Психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь і навичок математичного моделювання. *Засоби і технології сучасного навчального середовища:* Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, м. Кропивницький, 18–19 травня 2018 р. / Відповідальний редактор С. П. Величко. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», 2018. С. 18–19.

21. Ботузова Ю., Новікова А. Інтерактивна дошка на уроках математики. *Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті:* збірник матеріалів VI-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет-конференції, м. Кропивницький, 19–20 квітня 2018 р. / За

відп. ред. М. І. Садового. Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка, 2018. С. 34–36. (Особистий внесок здобувача: окремі складники змісту).

22. Новікова А. О. Педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання. *Сучасна освіта в контексті нової української школи:* зб. тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 11–12 жовтня 2018 р. М-во освіти і науки України, Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області. Чернівці, 2018. С. 62–64.

23. Новікова А. О. Дидактичні вимоги до конструювання системи прикладних задач як засобу формування уміння математичного моделювання. *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи*: збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю, 20–21 вересня 2019 р. /Міністерство освіти і науки України, ДЗ «ПНУ імені К. Д. Ушинського» [та ін.]. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. С. 106–108.

24. Новікова А. О., Чінчой О. О. Формування математичної компетентності учнів основної школи в позаурочній роботі. *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Інноваційний потенціал сучасної освіти та науки»,* НПУ імені М. П. Драгоманова, м. Київ, 2020. С. 183–186. *(Особистий внесок здобувача: описано особливості та форми позаурочної роботи з математики, які забезпечують формування математичної компетентності).*